Sendo $C(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano, podemos substituí-lo em sua equação. Isto nos dá

$$2(1 + 2t) + 2 + t + 2(-1 + 2t) = 5.$$

Logo,

$$t = \frac{1}{3}.$$

Portanto, as coordenadas do centro são

$$x_0 = 1 + 2.\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_0 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$z_0 = -1 + 2.\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Para calcularmos o raio r da circunferência, aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo OCP da Figura 4.23. Neste triângulo, a hipotenusa é o raio da esfera e, portanto, igual a 2. Como

$$\overline{OC} = d(0, C) = 1,$$

temos

$$r^2 = 4 - 1 = 3 \text{ e } r = \sqrt{3}.$$

Exercícios

4.36. Escreva uma equação do plano que contém o ponto (1, 1, 1) e é perpendicular ao vetor (2, -1, 8).

4.37. Escreva uma equação do plano definido pelos pontos
   a) $A(2, -1, 3)$, $B(0, 2, 1)$ e $C(1, 3, 2)$;
   b) $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$ e $C(1, 0, 0)$;
   c) $A(0, 0, 2)$, $B(1, 2, 2)$ e $C(1, 0, 2)$.

4.38. Escreva uma equação do plano definido pelo ponto (2, 1, 3) e a interseção do plano $2x - y - z = 2$ com o plano xy.

4.39. Escreva uma equação do plano
   a) paralelo ao eixo z e que contém os pontos (2, 0, 0) e (0, 3, 2);
   b) paralelo ao eixo y e que contém os pontos (2, 1, 0) e (0, 2, 1);
   c) paralelo ao plano yz e que contém o ponto (3, 4, -1);
   d) perpendicular ao eixo z e que contém o ponto (1, 1, 1).

4.40. Determine uma equação do plano cujas interseções com os eixos do sistema de coordenadas são os pontos (3, 0, 0), (0, -2, 0) e (0, 0, -3).

4.41. Deduza uma equação do plano definido pelo eixo z e pelo ponto (4, 4, 1).

4.42. Escreva as equações paramétricas da reta definida pelos pontos
   a) $A(2, 1, 3)$ e $B(1, 3, 7)$;
   b) $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 5, 0)$;
   c) $A(1, 1, 0)$ e $B(2, 2, 0)$.

4.43. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto $A(2, 1, 0)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + z = 0$.
4.44. Dados $A(2, 3, 6)$ e $B(4, 1, -2)$, escreva uma equação do plano mediador do segmento AB.
4.45. Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de $A(2, 1, 3)$, $B(2, 0, 3)$ e $C(0, 3, -1)$.
4.46. Deduza as equações dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos xz e yz.
4.47. Escreva uma equação do plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, no ponto $P(1, 2, -1)$.
4.48. Dados a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e os pontos $P(1, 1, 1)$ e $Q(2, 2, 3)$,
a) verifique que P está no interior e que Q está no exterior da esfera;
b) determine as interseções da esfera com a reta definida pelos pontos P e Q.
4.49. a) Verifique que o ponto $A(2, 4, 1)$ pertence à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.
b) Determine o ponto B tal que AB seja um diâmetro desta esfera.
4.50. Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, 1, 1)$ e $C(0, 0, 0)$, escreva as equações paramétricas da reta que contém a mediana, relativa ao lado AB, do triângulo ABC.

4.10 INTERSEÇÃO DE PLANOS

Exemplo. Interseção dos planos $2x + 3y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 0$.

Solução. Sabemos que a interseção de dois planos é uma reta. Para escrevermos as equações paramétricas desta reta, necessitamos conhecer dois de seus pontos ou um de seus pontos e um vetor a ela paralelo. Um ponto da interseção é um ponto que satisfaz simultaneamente as equações dos dois planos, isto é, é uma solução do sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(s)}$$

Em termos de z, a solução do sistema (s) é

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{7} - \frac{11}{7}z \\ y &= \frac{1}{7} + \frac{5}{7}z. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos da interseção são da forma

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{7} - \frac{11}{7}z, \frac{1}{7} + \frac{5}{7}z, z\right). \qquad (1)$$

Atribuindo valores a z, encontramos soluções particulares do sistema (s) e, portanto, pontos da interseção dos planos dados. Por exemplo, para $z = 0$ temos o ponto $P_0(2/7, 1/7, 0)$ e para $z = 1$, o ponto $P_1(-9/7, 6/7, 1)$. Logo, a interseção dos planos dados é a reta definida pelos pontos P_0 e P_1. Suas equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{7} - \frac{11t}{7} \\ y &= \frac{1}{7} + \frac{5t}{7} \\ z &= 0 + t. \end{aligned}$$