Como $\overline{IQ}$ é a distância de r a α, segue da última desigualdade que a distância da reta r ao plano α é menor do que ou igual à distância entre dois pontos quaisquer I de r e P de s.

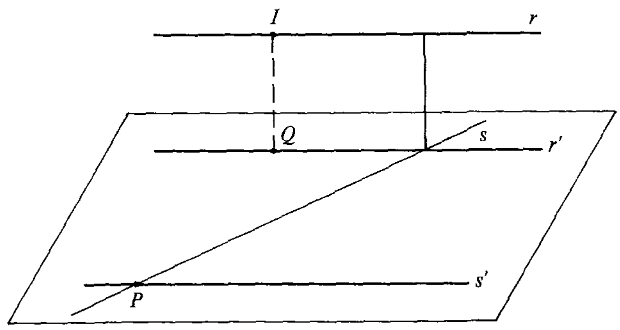

Fig. 4.26

Exemplo. Determine a distância entre as retas reversas

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t. \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 4 + 3t. \end{cases}$$

Solução. Primeiro, por um ponto de s, $(-5, 6, 4)$, por exemplo, tracemos a reta s' paralela a r. Como o vetor

$$(1, -3, 2) \times (4, -5, 3) = (1, 5, 7)$$

é perpendicular ao plano α definido por s e s', uma equação de α é

$$1(x + 5) + 5(y - 6) + 7(z - 4) = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5y + 7z = 53.$$

Tomemos agora um ponto qualquer de r, $P(2 + t,\ 1 - 3t, 1 + 2t)$. Aplicando a fórmula da distância de um ponto a um plano, obtemos

$$d(P, \alpha) = \frac{|2 + t + 5(1 - 3t) + 7(1 + 2t) - 53|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{39}{\sqrt{75}},$$

que é a menor distância entre as retas r e s.

Exercícios

4.51. Escreva equações paramétricas da interseção dos planos
a) $2x + y - z = 0$ e $x + y + z = 1$;
b) $x + 2y = 1$ e $z = 2$.

4.52. Determine o ponto de interseção da reta

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -2 \\ z &= 4 + 2t \end{aligned}$$

com cada um dos seguintes planos;
a) $x - 2y + 3z = 8$;
b) $2x + z = 5$;
c) $x = 2$.

4.53. Verifique que a reta

$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 5t \end{aligned}$$

está contida no plano $2x + y - z = 0$.

4.54. Verifique que a reta

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + 3t \end{aligned}$$

não intercepta o plano $x + y - z = 3$.

4.55. Determine os valores de a e b para que as retas

$$r: \begin{aligned} x &= 1 + at \\ y &= 2 + bt \\ z &= -1 + 2t \end{aligned} \qquad s: \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 + bt \\ z &= -1 + 2t \end{aligned}$$

sejam:
a) paralelas;
b) concorrentes;
c) reversas.

4.56. Determine os valores de a, b e d para que o plano $ax + by + 3z = d$ seja
a) paralelo ao plano $2x + y - 5z = 4$;
b) represente o mesmo plano que $2x + y - 5z = 4$.

4.57. Verifique que as retas

$$r: \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 5 + t \end{aligned} \qquad s: \begin{aligned} x &= -2 + 2t \\ y &= -5 + 3t \\ z &= 2 + 2t \end{aligned}$$

são concorrentes e determine uma equação do plano por elas definido.

4.58. Determine a distância do ponto (2, 1, 3) a cada um dos planos
a) $x - 2y + z = 1$;
b) $x + y - z = 0$;
c) $x - 5z = 8$.

4.59. Determine:
a) a distância do ponto (5, 4, -7) à reta

$$s: \begin{aligned} x &= 1 + 5t \\ y &= 2 - t \\ z &= t; \end{aligned}$$

b) a distância do ponto (2, 3, 5) a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.

4.60. Escreva uma equação do plano que contém o ponto (1, -2, 3) e é perpendicular a cada um dos planos $2x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$.

4.61. Escreva as equações paramétricas do plano paralelo ao eixo z e que contém a interseção dos planos $x + 2y + 3z = 4$ e $2x + y + z = 2$.

4.62. a) Determine as equações paramétricas da projeção da reta

$$r: \begin{aligned} x &= 3 + 3t \\ y &= -1 + t \\ z &= -3 + 2t \end{aligned}$$

sobre o plano

$$\alpha: 2x - y + 2z = 1.$$

b) Determine o ângulo da reta r com o plano α.

4.63. Escreva as equações paramétricas e cartesiana do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano α de equação $3x + 2y - z = 5$. Este plano é chamado ***plano projetante*** de r sobre α.

4.64. Determine o ângulo agudo entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t. \end{cases}$$

4.65. Determine o ângulo agudo entre os planos $2x - y + 3z = 0$ e $x + y - 8y = 1$.

4.66. a) Verifique que qualquer ponto da reta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

é eqüidistante de $A(1, 2, 1)$, $B(1, 4, 3)$ e $C(3, 2, 1)$.

b) Determine o ponto de r mais próximo destes pontos.

4.67. a) Dados os pontos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ e $C(3, -2, 4)$, determine no plano $2x - y + 5z = 2$ um ponto eqüidistante dos vértices do triângulo ABC.

b) Determine o circuncentro do triângulo ABC.

4.68. Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, -1, 1)$ e o plano α de equação $2x - y + 2z = 3$, determine as equações paramétricas de uma reta r de α tal que todo ponto de r é eqüidistante de A e B.

4.69. Escreva as equações paramétricas da bissetriz do ângulo menor das retas

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

4.70. Determine o simétrico do ponto $P(2, 1, 3)$ em relação

a) ao ponto $O(3, -1, 1)$;

b) à reta

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + t; \end{cases}$$

c) ao plano $2x - 2y + 3z = 2$.

4.71. Escreva as equações paramétricas da simétrica da reta

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

em relação ao plano $x - 2y + 3z = 1$.

4.72. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto $P(1, 3, 5)$ e é concorrente com as retas

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$$

4.73. Dadas as retas reversas

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$