Exercícios

2.49. Escreva as equações da reta que

a) contém o ponto (-1, 1) e tem a direção do vetor (2, 3);

b) contém os pontos $A(3, 2)$ e $B(-3, 1)$.

2.50. Dados os vetores $u = (1, 5)$ e $v = (4, 1)$, escreva as equações paramétricas e cartesianas das retas que contêm as diagonais do paralelogramo definido por u e v.

2.51. a) Mostre que

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 7 - 5t$$

são equações paramétricas da reta definida pelos pontos $A(3, 7)$ e $B(5, 2)$.

b) Que valores devem ser atribuídos a t para se obter os pontos A e B?

c) Que valores de t dão os pontos entre A e B?

d) Localize na reta os pontos para os quais $t > 1$ e $t < 0$.

2.52. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto (1, 2) e faz com a reta $y = -2x + 4$ um ângulo de 60°.

2.53. Determine a projeção ortogonal do ponto $P(2, 4)$ sobre a reta

$$x = 1 + 2t$$
$$y = -1 + 3t.$$

2.54. Dado o ponto $A(2, 3)$, ache o vetor $\vec{AP}$, onde P é o pé da perpendicular baixada de A à reta $y = 5x + 3$.

2.55. Determine a interseção da reta $y = 2x - 1$ com a reta definida pelos pontos (2, 1) e (0, 0).

2.56. Dados o ponto $P(2, -1)$ e a reta r de equação $y = 3x - 5$, escreva uma equação da reta que contém o ponto P e

a) seja paralela à reta r;

b) seja perpendicular à reta r.

2.57. Determine o ângulo menor entre as retas

a) $2x + 3y = 1$ e $y = -5x + 8$;

b) $x + y + 1 = 0$ e $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$.

2.58. Mostre que a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $Ax + By + C = 0$ é dada por

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.59. Mostre que, se a distância entre $P(a, b)$ e a origem é c, então a reta definida por P e $A(-c, 0)$ é perpendicular à reta definida por P e $B(c, 0)$.

2.60. Determine o comprimento do segmento OP da Figura 2.29, sabendo que $OADB$ é um retângulo.

2.61. Determine a distância entre as retas $2x - y = 6$ e $2x - y = -1$.

4.52. Determine o ponto de interseção da reta

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -2 \\ z &= 4 + 2t \end{aligned}$$

com cada um dos seguintes planos;
a) $x - 2y + 3z = 8$;
b) $2x + z = 5$;
c) $x = 2$.

4.53. Verifique que a reta

$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 5t \end{aligned}$$

está contida no plano $2x + y - z = 0$.

4.54. Verifique que a reta

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + 3t \end{aligned}$$

não intercepta o plano $x + y - z = 3$.

4.55. Determine os valores de a e b para que as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + bt \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

sejam:
a) paralelas;
b) concorrentes;
c) reversas.

4.56. Determine os valores de a, b e d para que o plano $ax + by + 3z = d$ seja
a) paralelo ao plano $2x + y - 5z = 4$;
b) represente o mesmo plano que $2x + y - 5z = 4$.

4.57. Verifique que as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

são concorrentes e determine uma equação do plano por elas definido.

4.58. Determine a distância do ponto (2, 1, 3) a cada um dos planos
a) $x - 2y + z = 1$;
b) $x + y - z = 0$;
c) $x - 5z = 8$.

4.59. Determine:
a) a distância do ponto (5, 4, -7) à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - t \\ z = t; \end{cases}$$

b) a distância do ponto (2, 3, 5) a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.

4.60. Escreva uma equação do plano que contém o ponto (1, -2, 3) e é perpendicular a cada um dos planos $2x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$.

4.61. Escreva as equações paramétricas do plano paralelo ao eixo z e que contém a interseção dos planos $x + 2y + 3z = 4$ e $2x + y + z = 2$.

4.62. a) Determine as equações paramétricas da projeção da reta

$$r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

sobre o plano

$$\alpha: 2x - y + 2z = 1.$$

b) Determine o ângulo da reta r com o plano α.

4.63. Escreva as equações paramétricas e cartesiana do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano α de equação $3x + 2y - z = 5$. Este plano é chamado ***plano projetante*** de r sobre α.

4.64. Determine o ângulo agudo entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t. \end{cases}$$

4.65. Determine o ângulo agudo entre os planos $2x - y + 3z = 0$ e $x + y - 8y = 1$.

4.66. a) Verifique que qualquer ponto da reta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

é eqüidistante de $A(1, 2, 1)$, $B(1, 4, 3)$ e $C(3, 2, 1)$.

b) Determine o ponto de r mais próximo destes pontos.

4.67. a) Dados os pontos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ e $C(3, -2, 4)$, determine no plano $2x - y + 5z = 2$ um ponto eqüidistante dos vértices do triângulo ABC.

b) Determine o circuncentro do triângulo ABC.

4.68. Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, -1, 1)$ e o plano α de equação $2x - y + 2z = 3$, determine as equações paramétricas de uma reta r de α tal que todo ponto de r é eqüidistante de A e B.

4.69. Escreva as equações paramétricas da bissetriz do ângulo menor das retas

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

4.70. Determine o simétrico do ponto $P(2, 1, 3)$ em relação

a) ao ponto $O(3, -1, 1)$;

b) à reta

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + t; \end{cases}$$

c) ao plano $2x - 2y + 3z = 2$.

4.71. Escreva as equações paramétricas da simétrica da reta

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

em relação ao plano $x - 2y + 3z = 1$.

4.72. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto $P(1, 3, 5)$ e é concorrente com as retas

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$$

4.73. Dadas as retas reversas

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

determine:

a) a menor distância entre r e s;

b) as equações paramétricas da perpendicular comum às retas r e s.

4.74. Prove que o vetor $(a, b, c) \times (a_1, b_1, c_1)$ é paralelo à interseção dos planos $ax + by + cz = d$ e $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$.

4.75. Demonstre que se (a, b, c) é unitário, então a distância do plano $ax + by + cz = d$ à origem é $|d|$.

4.76. Determine o ponto do plano $ax + by + cz = d$ mais próximo da origem.

4.77. a) Determine a distância de uma diagonal de um cubo a cada uma de suas arestas.

b) Unindo-se o centro de uma face de um cubo com os vértices da face oposta, obtém-se uma pirâmide de base quadrada. Determine os ângulos entre os planos das faces da pirâmide.

4.78. Escreva uma equação do plano paralelo a $2x - y + 6z = 4$ e tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$.

4.79. Determine o centro e o raio da circunferência da interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $2x + y + z = 4$.

4.80. O movimento de uma partícula é tal, que no instante t sua posição é

$$P(t) = (1 + t, 1 - 2t, t).$$

a) Em que instante a partícula está mais próxima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

b) Qual é o ponto desta esfera mais próxima da trajetória da partícula?

Dada uma reta r paralela a um plano π, a distância d da reta ao plano é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano, isto é,

$$d(r, \pi) = d(P_0, \pi) \quad \text{com} \quad P_0 \in r.$$

problema resolvido em 6.4.

Nota

O cálculo de distâncias (distância entre dois pontos, distância de ponto à reta e distância entre retas paralelas) no plano não será objeto de estudo neste livro por pertencer ao currículo do 2º grau.

6.7 Problemas Propostos

1) Mostrar que o ponto $P_1(2, 2, 3)$ é eqüidistante dos pontos $P_2(1, 4, -2)$ e $P_3(3, 7, 5)$.

2) Determinar, no eixo das ordenadas, um ponto eqüidistante de $A(1, 1, 4)$ e $B(-6, 6, 4)$.

3) Calcular:

a) a distância do ponto $P(1, 2, 3)$ à reta

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

b) a distância do ponto $P(1, 2, 3)$ a cada um dos eixos coordenados

4) Seja o triângulo ABC de vértices $A(-3, 1, 4)$, $B(-4, -1, 0)$ e $C(-4, 3, 5)$.

Calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

5) Calcular a distância entre as retas r e s nos seguintes casos:

a) $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$

b) r passa pelos pontos $A(1, 0, 1)$ e $B(-1, -1, 0)$ e s pelos pontos $C(0, 1, -2)$ e $D(1, 1, 1)$

c) $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

d) $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases}$ e s: eixo dos x

e) $r: x = y = z - 2$ e $s: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$

6) Determinar a distância do ponto $P(2, -1, 2)$ a cada um dos planos:

a) $\pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$

b) $\pi: x + y + z = 0$

c) $\pi: 2x + y = 3$

7) Achar a distância do ponto $P(2, -3, 5)$ ao plano

$\pi: 3x + 2y + 6z - 2 = 0.$

8) Achar a distância da origem a cada um dos planos

a) $\pi: 3x - 4y + 20 = 0$

b) $\pi: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 1 + 3h - t \\ z = -t \end{cases}$

9) Dado o tetraedro de vértices $A(1, 2, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(0, -1, -1)$ e $D(3, 1, 0)$, calcular a medida da altura baixada do vértice D ao plano da face ABC.

10) Escrever as equações dos planos paralelos ao plano $\pi: 3x - 2y - 6z - 5 = 0$ que distam 5 unidades da origem.

11) Calcular a distância entre os planos paralelos:

a) $\pi_1 : 2x + 2y + 2z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x + y + z - 3 = 0$

b) $\pi_1 : x - 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 6z - 8 = 0$

12) Determinar a distância da reta

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

a) ao plano xOz

b) ao plano yOz

c) ao eixo dos z

d) ao plano $\pi: x + y - 12 = 0$

6.7.1 Respostas dos Problemas Propostos

1) $d(P_1,P_2) = \sqrt{30} = d(P_1,P_3)$

2) $(0, 7, 0)$

3) *a)* 2 ; *b)* $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$

4) $\dfrac{\sqrt{3157}}{41}$

5) *a)* $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$; *b)* $\dfrac{5}{\sqrt{35}}$; *c)* $2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$; *e)* $\dfrac{\sqrt{186}}{3}$

6) *a)* $\dfrac{7}{3}$; *b)* $\sqrt{3}$; *c)* 0

7) 4

8) *a)* 4 ; *b)* $\dfrac{7}{\sqrt{35}}$

9) $\dfrac{8}{\sqrt{19}}$

10) $3x - 2y - 6z \pm 35 = 0$

11) *a)* $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; *b)* $\dfrac{11}{3\sqrt{5}}$

12) *a)* 4 ; *b)* 3

c) 5 ; *d)* $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$