Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos, finalmente,

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y - 200 = 0,$$

que não contém radicais e é do segundo grau.

Exercícios

3.1. Determine os focos, os vértices e esboce as elipses cujas equações são:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $4x^2+9y^2=36$ d) $x^2+2y^2=1.$

3.2. Deduza uma equação da elipse
a) de focos $F(0, 1)$ e $F_1(0, -1)$ e eixo maior 4;
b) de focos $F(1, 1)$ e $F_1(-1,-1)$ e eixo maior $4\sqrt{2}$.

3.3. Escreva a equação da elipse que contém o ponto $\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)$ e cujos focos são

$$F\left(\sqrt{7},0\right) \text{ e } F_1\left(-\sqrt{7},0\right).$$

3.4. Escreva a equação da elipse de focos $F(0, a)$ e $F_1(0, b)$ sabendo que um de seus vértices é a origem e que $b > a > 0$.

3.5. a) Mostre que se $P_1(x_0, y_0)$ satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

então os pontos $P_2(-x_0, y_0)$, $P_3(x_0, -y_0)$ e $P_4(-x_0, -y_0)$ também satisfazem.
b) Conclua, a partir do item a), que a elipse é simétrica em relação a cada um de seus eixos e em relação à origem.

3.6. Utilizando régua e compasso, construa uma elipse conhecendo
a) seus focos e o eixo maior;
b) seus focos e o eixo menor;
c) seus quatro vértices.

3.7. Mostre que
a) os gráficos das funções definidas por

$$f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ e } f(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad -a\le x\le a,$$

são semi-elipses;
b) se $-a<x_0<a$ e $y_0=f(x_0)$, a equação da reta que contém (x_0, y_0) e cuja declividade é $f'(x_0)$ é dada por

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Esta reta é chamada **tangente à elipse**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

no ponto (x_0, y_0).

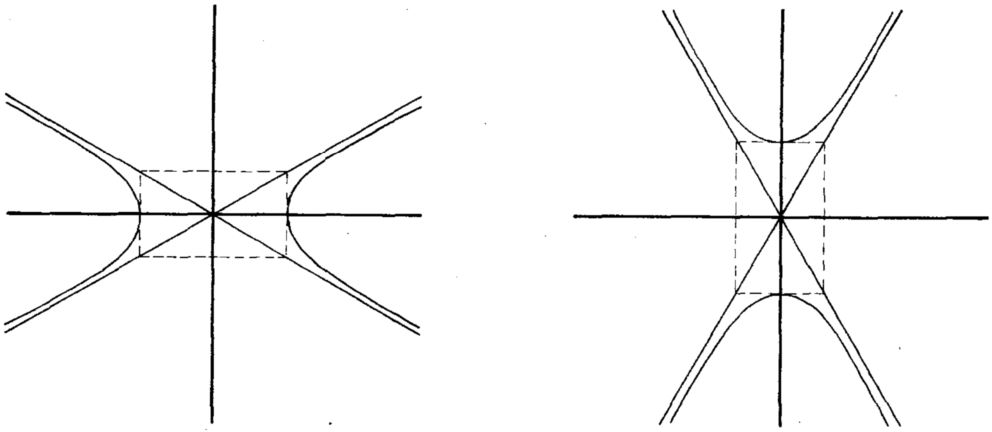


Fig. 3.13

Exercícios

3.13 Determine os focos, os vértices e esboce as hipérboles cujas equações são:

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

c) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ d) $x^2 - y^2 = 1$.

3.14. Deduza uma equação da hipérbole

a) de focos $F(3, 0)$ e $F_1(-3, 0)$ e vértices $A(2, 0)$ e $A_1(-2, 0)$;

b) de focos $F(2, 2)$ e $F_1(-2, -2)$ e vértices $A(1, 1)$ e $A_1(-1, -1)$.

3.15. Seja P o pé da perpendicular baixada do foco F da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a uma das assíntotas. Demonstre que $\overline{PF}=b$ e $\overline{PO}=a$, onde O é a origem do sistema de coordenadas.

3.16. Mostre que

a) os gráficos das funções definidas por

$$f(x)=b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} \text{ e } f(x)=-b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}},\ x \in \mathbf{R}$$

são ramos de hipérbole;

b) se $y_0 = f(x_0)$, a equação da reta que contém (x_0, y_0) e cuja declividade é $f'(x_0)$ é dada por

$$\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{x_0 x}{a^2}=1.$$

Esta reta é chamada **tangente à hipérbole**

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

no ponto (x_0, y_0).

3.17. Mostre que nenhuma tangente à hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

passa pela origem.

3.18. Deduza a equação da reta perpendicular à tangente à hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0). Esta reta é chamada **normal à hipérbole** no ponto (x_0, y_0).

3.19. Deduza as equações da tangente e da normal à hipérbole

$$y^2 - 2x^2 = 1$$

no ponto (2, 3).

3.20. Determine uma equação da hipérbole cujas assíntotas são $y = x$ e $y = -x$, sabendo que um de seus vértices é o ponto (2, 0).

3.3 PARÁBOLA

Dados um ponto F e uma reta r, chama-se **parábola de foco F e diretriz r** ao conjunto de pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Construção. Pelo foco F traçamos a perpendicular à diretriz r e tomamos sobre esta perpendicular (chamada **eixo** da parábola) um ponto C. Por C traçamos uma paralela a r e com abertura igual a $d(C, r)$ e centro em F determinamos nesta paralela os pontos P e P' da parábola. Unindo os pontos assim construídos, obtemos a parábola (Figura 3.14).

Observe que se escolhermos o ponto C, sobre o eixo, de modo que $d(C, r) < d(C, F)$, o arco traçado com centro em F e raio $d(C, F)$ não intercepta a paralela à diretriz traçada por C. O ponto da parábola mais próximo de r é o ponto O (veja a Figura 3.14b) tal que $d(O, r) = d(O, F)$. Este ponto é chamado **vértice da parábola**.

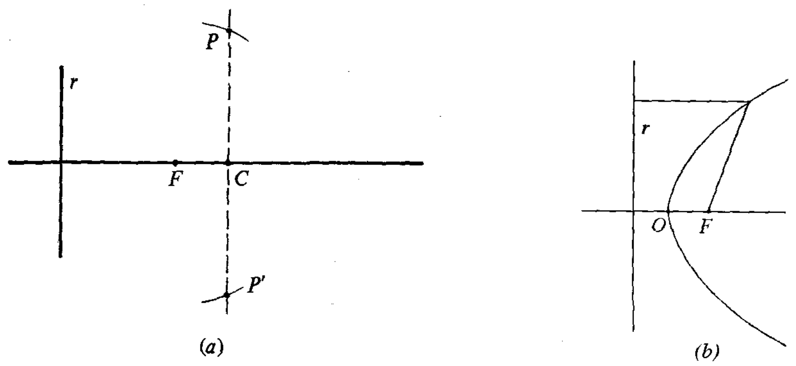


Fig. 3.14

que é a equação da parábola.

Nos demais casos, efetuando contas semelhantes, obtemos

$$y = -\frac{1}{4a}x^2$$

$$x = \frac{1}{4a}y^2$$

$$x = -\frac{1}{4a}y^2,$$

que são, respectivamente, as equações das parábolas das Figuras 3.15b, c e d. Em todos os casos

$$a = \frac{1}{2}d(F, r).$$

Exemplo. O gráfico da equação

$$x = -y^2$$

é a parábola de foco $F(-1/4, 0)$ e diretriz $x = 1/4$, pois, neste caso, $1/4a = 1$, donde $a = 1/4$. Veja a Figura 3.16.

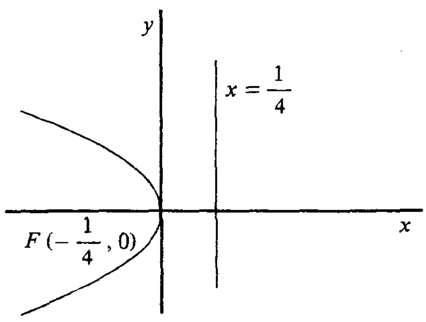


Fig. 3.16

Exercícios

3.21. Determine o foco, o vértice, a equação da diretriz e esboce as parábolas cujas equações são:

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $x = -\frac{1}{4}y^2$

c) $y = x^2$ d) $x = 2y^2$

3.22. Deduza uma equação da parábola
a) de foco $F(0, -1)$ e diretriz $y = 1$;
b) de foco $F(-1, 0)$ e vértice $(0, 0)$;
c) de foco $F(1, 1)$ e vértice $(0, 0)$.

3.23. Deduza uma equação da parábola com vértice em $V(6, -3)$ e cuja diretriz é a reta $3x - 5y + 1 = 0$.

3.24. Prove que toda parábola cujo eixo é paralelo ao eixo y tem uma equação da forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Qual é a forma geral das equações cujo eixo é paralelo ao eixo x?

3.25. Deduza uma equação da parábola que contém o ponto (1, 4), sabendo que seu eixo é paralelo ao eixo y e que seu vértice é o ponto (2, 3).

3.26. Deduza uma equação da parábola que contém os pontos $(-1, 12)$, $(1, 2)$ e $(2, 0)$ e tem eixo paralelo ao eixo y.

3.27. Prove que numa parábola o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo é duas vezes a distância do foco à diretriz.

3.28. a) Prove que a reta $x - 2ay_0y + x_0 = 0$ é tangente à parábola $x = ay^2$ no ponto $P(x_0, y_0)$.

b) Mostre que a perpendicular à tangente em $P(x_0, y_0)$ é bissetriz do ângulo formado por PF (onde F é o foco da parábola) e a paralela ao eixo da parábola, que contém $P(x_0, y_0)$.

3.29. Uma partícula se move de modo que no instante t seu vetor posição é

$$\vec{OP}(t) = (t, 4t - t^2).$$

Determine:

a) uma equação cartesiana da trajetória da partícula;

b) o instante em que a partícula se encontra mais próxima da reta $y = 5$.

3.30. Sejam a e b números reais tais que $b > a > 0$ e considere os pontos $B(0, 0)$, $B_1(0, a + b)$, $F(0, a)$ e $F_1(0, b)$.

a) Mostre que as equações da elipse de vértice B e B_1 e focos F e F_1 e da parábola de vértice B e foco F podem ser escritas, respectivamente, nas formas

$$y = \frac{1}{a+b}y^2 + \frac{1}{4a}\frac{a+b}{b}x^2$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2.$$

b) Se os pontos (x, y_e) e (x, y_p) pertencem, respectivamente, à elipse e à parábola do item a), mostre que

$$\lim_{b\to\infty} y_e = y_p.$$

c) A partir dos itens a) e b), conclua que a parábola de vértice B e foco F pode ser imaginada como a posição limite da elipse de vértices B e B_1 e focos F e F_1 quando o foco F_1 tende para o infinito.

Observação. Veja na Seção 3.5 como a elipse pode ser obtida interceptando-se um cone com o plano. A posição limite descrita no item c) corresponde ao caso em que o plano é paralelo à geratriz do cone.

3.4 ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Nos parágrafos anteriores vimos que a equação de uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) é sempre do segundo grau, isto é, é da forma

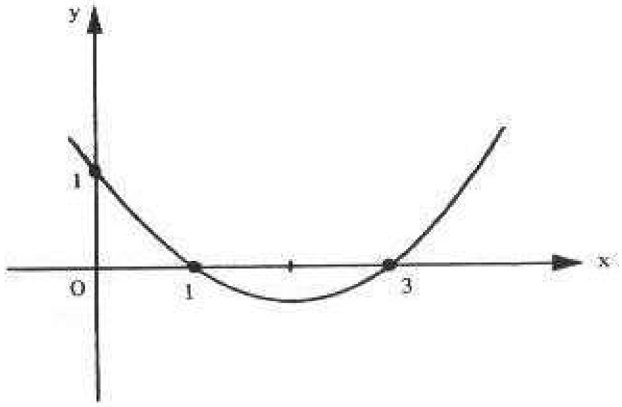
$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Vimos, ainda, que quando o sistema de coordenadas é convenientemente escolhido, a equação da cônica reduz-se a uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{E}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{H}$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2, y = -\frac{1}{4a}x^2, x = \frac{1}{4a}y^2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4a}y^2. \tag{P}$$



As coordenadas dos pontos devem satisfazer a equação desta parábola, isto é:

$$\begin{cases} 1 = a(0)^2 + b(0) + c \\ 0 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 0 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0, \end{cases}$$

sistema cuja solução é $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$ e $c = 1$.

Logo, a equação da parábola é:

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$$

7.1.6 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 18, estabelecer a equação de cada uma das parábolas, sabendo que:

1) vértice: $V(0, 0)$; diretriz d: $y = -2$

2) foco: $F(2, 0)$; diretriz d: $x + 2 = 0$

3) vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, -3)$

4) vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(-3, 0)$

5) foco: $F(0, -1)$; d: $y - 1 = 0$

6) vértice: $V(0, 0)$; simetria em relação ao eixo dos y e passando pelo ponto $P(2, -3)$.

7) vértice: $V(-2, 3)$; foco: $F(-2, 1)$

8) vértice: $V(2, -1)$; foco: $F(5, -1)$

9) vértice: $V(4, 1)$; diretriz d: $x + 4 = 0$

10) vértice: $V(0, 0)$; eixo $y = 0$; passa por $(4, 5)$.

11) vértice: $V(-4, 3)$; foco: $F(-4, 1)$.

12) foco: $F(2, 3)$; diretriz: $y = -1$

13) foco: $F(6, 4)$; diretriz: $y = -2$

14) foco: $F(3, -1)$; diretriz: $x = \frac{1}{2}$

15) vértice: $V(1, 3)$; eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P(-1, -1)$.

16) eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e passa pelos pontos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(3, 1)$.

17) eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e passa pelos pontos $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 0)$ e $P_3(2, 0)$.

18) eixo paralelo a $y = 0$ e passa por $P_1(-2, 4)$, $P_2(-3, 2)$ e $P_3(-11, -2)$.

Em cada um dos problemas 19 a 34, determinar o vértice, o foco, uma equação para a diretriz e uma equação para o eixo da parábola de equação dada. Esboçar o gráfico.

19) $x^2 = -12y$

20) $y^2 = -100x$

21) $x^2 = 10y$

22) $y^2 - x = 0$

23) $y^2 = -3x$

24) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$

25) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$

26) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$

27) $y^2 + 2y - 16x - 31 = 0$

28) $y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$

29) $y^2 - 12x - 12 = 0$

30) $y = x^2 - 4x + 2$

31) $x^2 = 12(y - 6)$

32) $y = 4x - x^2$

33) $8x = 10 - 6y + y^2$

34) $6y = x^2 - 8x + 14$

7.1.6.1 *Respostas dos problemas propostos*

1) $x^2 = 8y$

2) $y^2 = 8x$

3) $x^2 = -12y$

4) $y^2 = -12x$

5) $x^2 = -4y$

6) $3x^2 + 4y = 0$

7) $x^2 + 4x + 8y - 20 = 0$

8) $y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$

9) $y^2 - 2y - 32x + 129 = 0$

10) $4y^2 - 25x = 0$

11) $x^2 + 8x + 8y - 8 = 0$

12) $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$

13) $(x - 6)^2 = 12(y - 1)$

14) $(y + 1)^2 = 5(x - \frac{7}{4})$

15) $(y - 3)^2 = -8(x - 1)$

16) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

17) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

18) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 2y - 6$

19) $V(0, 0)$, $F(0, -3)$, $y = 3$, $x = 0$

20) $V(0, 0)$, $F(-25, 0)$, $x = 25$, $y = 0$

21) $V(0, 0)$, $F(0, \frac{5}{2})$, $y = -\frac{5}{2}$, $x = 0$

22) $V(0, 0)$, $F(\frac{1}{4}, 0)$, $x = -\frac{1}{4}$, $y = 0$

23) $V(0, 0)$, $F(-\frac{3}{4}, 0)$, $x = \frac{3}{4}$, $y = 0$

24) $V(-2, -1)$, $F(-2, -3)$, $y = 1$, $x = -2$

25) $V(1, -2)$, $F(1, 3)$, $y = -7$, $x = 1$

26) $V(3, -2)$, $F(-1, -2)$, $x = 7$, $y = -2$

27) $V(-2, -1)$, $F(2, -1)$, $x = -6$, $y = -1$

28) $V(3, -1)$, $F(7, -1)$, $x = -1$, $y = -1$

29) $V(-1, 0)$, $F(2, 0)$, $x = -4$, $y = 0$

30) $V(2, -2)$, $F(2, -\frac{7}{4})$, $y = -\frac{9}{4}$, $x = 2$

31) $V(0, 6)$, $F(0, 9)$, $y = 3$, $x = 0$

32) $V(2, 4)$, $F(2, \frac{15}{4})$, $4y - 17 = 0$, $x - 2 = 0$

33) $V(\frac{1}{8}, 3)$, $F(\frac{17}{8}, 3)$, $8x + 15 = 0$, $y - 3 = 0$

34) $V(4, -\frac{1}{3})$, $F(4, \frac{7}{6})$, $6y + 11 = 0$, $x - 4 = 0$

7.2 A Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a > 2c$.

Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou:

$$|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

dá-se o nome de elipse (Fig. 7.2-a).

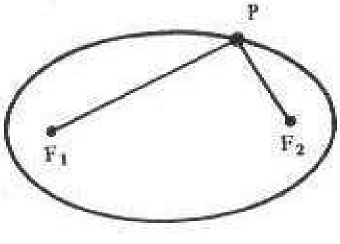


Figura 7.2-a

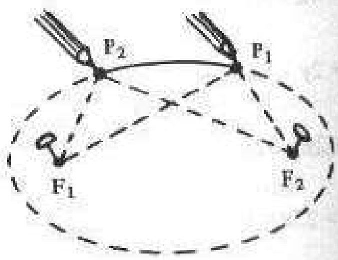


Figura 7.2-b

Para determinar os focos precisamos do valor de c:

$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = 4 + c^2$

$c^2 = 5$

$c = \sqrt{5}$

Portanto, os focos são:

$F_1(1 - \sqrt{5}, 2)$ e $F_2(1 + \sqrt{5}, 2)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7.2.4 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 8, determinar os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

1) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

3) $x^2 + 25y^2 = 25$

4) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

5) $4x^2 + 9y^2 = 25$

6) $4x^2 + y^2 = 1$

7) $4x^2 + 25y^2 = 1$

8) $9x^2 + 25y^2 = 25$

Em cada um dos problemas 9 a 22, determinar a equação da elipse que satisfaz as condições dadas.

9) eixo maior mede 10 e focos $(\pm 4,0)$.

10) centro $C(0,0)$, um foco $F(\frac{3}{4}, 0)$ e um vértice $A(1, 0)$.

11) centro $C(0,0)$, um foco $F(0, -\sqrt{5})$ e eixo menor mede 4.

12) centro $C(0, 0)$, eixo menor mede 6, focos no eixo dos x e passa pelo ponto $P(-2\sqrt{5}, 2)$.

13) centro $C(0,0)$, focos no eixo dos x, excentricidade $e = \frac{2}{3}$ e passa pelo ponto $P(2, -\frac{5}{3})$.

14) vértices $A(0, \pm 6)$ e passando por $P(3, 2)$.

15) centro $C(2, 4)$, um foco $F(5, 4)$ e excentricidade $\frac{3}{4}$.

16) eixo maior mede 10 e focos $F_1(2, -1)$ e $F_2(2, 5)$.

17) centro $C(-3, 0)$, um foco $F(-1, 0)$ e tangente ao eixo dos y.

18) centro $C(-3, 4)$, semi-eixos de comprimento 4 e 3 e eixo maior paralelo ao eixo dos x.

19) mesmos dados do problema anterior mas com eixo paralelo ao eixo dos y.

20) vértices $A_1(-1, 2)$, $A_2(-7, 2)$ e a medida do eixo menor igual a 2.

21) centro $C(2, -1)$, tangente aos eixos coordenados e eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

22) vértices $A_1(1, -4)$ e $A_2(1, 8)$, excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

Em cada um dos problemas 23 a 28, determinar o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

23) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

24) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$

25) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$

26) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$

27) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

28) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

7.2.5.1 *Respostas de problemas propostos*

1) $C(0, 0)$, $A(\pm 10, 0)$, $F(\pm 8, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

2) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 10)$, $F(0, \pm 8)$, $e = \frac{4}{5}$

3) $C(0, 0)$, $A(\pm 5, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{6}, 0)$, $e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

4) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 3)$, $F(0, \pm 2)$, $e = \frac{2}{3}$

5) $C(0, 0)$, $A(\pm\frac{5}{2}, 0)$, $F(\pm\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

6) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $C(0, 0)$, $A(\pm\frac{1}{2}, 0)$, $F(\pm\frac{\sqrt{21}}{10}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

8) $C(0, 0)$, $A(\pm\frac{5}{3}, 0)$, $F(\pm\frac{4}{3}, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

9) $9x^2 + 25y^2 = 225$

10) $7x^2 + 16y^2 = 7$

11) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

12) $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

13) $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

14) $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

15) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$

16) $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$

17) $5x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

18) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 128y + 193 = 0$

19) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 72y + 144 = 0$

20) $x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 43 = 0$

21) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

22) $9x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 151 = 0$

23) $C(2, -3)$, $A_1(-2, -3)$, $A_2(6, -3)$, $F(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

24) $C(-1, -2)$, $A_1(-1, -7)$, $A_2(-1, 3)$, $F_1(-1, -5)$, $F_2(-1, 1)$ $e = \dfrac{3}{5}$

25) $C(3, -1)$, $A_1(6, -1)$, $A_2(0, -1)$, $F(3 \pm \sqrt{5}, -1)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

26) $C(-2, 2)$, $A_1(-2, -2)$, $A_2(-2, 6)$, $F(-2, 2 \pm \sqrt{15})$, $e = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

27) $C(3, -4)$, $A_1(3, -8)$, $A_2(3, 0)$, $F(3, -4 \pm \sqrt{7})$, $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

28) $C(1, 2)$, $A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$, $F(1 \pm \sqrt{5}, 2)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7.3 A Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a < 2c$.

Sendo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 9 + 7$$
$$c = 4,$$

os focos são: $F_1(-6, 3)$ e $F_2(2, 3)$.

7.3.4 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 10, determinar os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

1) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

2) $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1$

3) $9x^2 - 16y^2 = 144$

4) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

5) $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$

6) $3x^2 - y^2 + 3 = 0$

7) $x^2 - y^2 = 1$

8) $x^2 - y^2 = 2$

9) $y^2 - 4x^2 = 1$

10) $2y^2 - 4x^2 = 1$

Em cada um dos problemas 11 a 24, determinar a equação da hipérbole que satisfaz as condições dadas.

11) focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $A(\pm 3, 0)$

12) focos $F(0, \pm 3)$, vértices $A(0, \pm 2)$

13) vértices $A(\pm 4, 0)$, passando por $P(8, 2)$

14) centro $C(0, 0)$, eixo real sobre Oy, $b = 8$ e excentricidade $\frac{5}{3}$

15) focos $F(0, \pm 5)$, comprimento do eixo imaginário 4

16) vértices $A(\pm 3, 0)$, equações das assíntotas $y = \pm 2x$

17) vértices em $(5, -2)$ e $(3, -2)$, um foco em $(7, -2)$

18) vértices em $(5, 5)$ e $(5, -1)$, excentricidade $e = 2$

19) centro $C(5, 1)$, um foco em $(9, 1)$, eixo imaginário mede $4\sqrt{2}$

20) focos $F_1(-1, -5)$ e $F_2(5, -5)$, hipérbole eqüilátera

21) vértices $A_1(-3, -4)$ e $A_2(-3, 4)$, hipérbole eqüilátera

22) centro $C(2, -3)$, eixo real paralelo a Oy, passando por $(3, -1)$ e $(-1, 0)$

23) centro $C(-2, 1)$, eixo real paralelo a Ox, passando por $(0, 2)$ e $(-5, 6)$

24) focos em $(3, 4)$ e $(3, -2)$, excentricidade $e = 2$

Em cada um dos problemas 25 a 30, determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

25) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

26) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$

27) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

28) $4x^2 - y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$

29) $9x^2 - y^2 + 36x + 6y + 63 = 0$

30) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

31) Obter a equação reduzida resultante de uma translação de eixos, classificar, dar os elementos e representar graficamente as equações:

a) $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$

b) $x^2 - y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$

c) $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$

d) $3x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 19 = 0$

e) $x^2 + 2x + 8y - 15 = 0$

f) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 45 = 0$

g) $9y^2 - 25x^2 - 90y - 50x = 25$

7.3.4.1 *Respostas dos problemas propostos*

1) $A(\pm 10, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{41}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

2) $A(0, \pm 10)$, $F(0, \pm 2\sqrt{41})$, $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

3) $A(\pm 4, 0)$, $F(\pm 5, 0)$, $e = \frac{5}{4}$

4) $A(0, \pm 2)$, $F(0, \pm 3)$, $e = \frac{3}{2}$

5) $A(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$

6) $A(0, \pm\sqrt{3})$, $F(0, \pm 2)$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

7) $A(\pm 1, 0)$, $F(\pm\sqrt{2}, 0)$, $e = \sqrt{2}$

8) $A(\pm\sqrt{2}, 0)$, $F(\pm 2, 0)$, $e = \sqrt{2}$

9) $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

10) $A(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$, $F(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$

11) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

12) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

13) $x^2 - 12y^2 - 16 = 0$

14) $16y^2 - 9x^2 - 576 = 0$

15) $\frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$

16) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

17) $8x^2 - y^2 - 64x - 4y + 116 = 0$

18) $x^2 - 3y^2 - 10x + 12y + 40 = 0$

19) $x^2 - y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$

20) $2x^2 - 2y^2 - 8x - 20y - 51 = 0$

21) $x^2 - y^2 + 6x + 25 = 0$

22) $5x^2 - 8y^2 - 20x - 48y - 25 = 0$

23) $24x^2 - 5y^2 + 96x + 10y = 0$

24) $12y^2 - 4x^2 - 24y + 24x - 51 = 0$

25) $C(1, -2)$, $A_1(-1, -2)$, $A_2(3, -2)$, $F(1 \pm \sqrt{13}, -2)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

26) $C(-3, 3)$, $A_1(-5, 3)$, $A_2(-1, 3)$, $F(-3 \pm \sqrt{5}, 3)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

27) $C(3, 1)$, $A_1(3, -2)$, $A_2(3, 4)$, $F(3, 1 \pm \sqrt{13})$, $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

28) $C(4, 2)$, $A_1(1, 2)$, $A_2(7, 2)$, $F(4 \pm 3\sqrt{5}, 2)$, $e = \sqrt{5}$

29) $C(-2, 3)$, $A_1(-2, -3)$, $A_2(-2, 9)$, $F(-2, 3 \pm 2\sqrt{10})$, $e = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

30) $C(2, -1)$, $A_1(2, -5)$, $A_2(2, 3)$, $F_1(2, -6)$, $F_2(2, 4)$, $e = \dfrac{5}{4}$

31) *a)* $\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$, elipse, eixo maior 4, eixo menor 2, focos $F(2 \pm \sqrt{3}, 3)$

b) $x'^2 - y'^2 = 1$, hipérbole, eixo real 2, eixo imaginário 2, $F(4 \pm \sqrt{2}, -2)$

c) $y'^2 = 8x'$, parábola, $p = 4$, diretriz: $x = -1$, $F(3, -3)$

d) $3x'^2 + 2y'^2 = 1$, elipse, eixo maior $\sqrt{2}$, eixo menor $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $F(2, -2 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{6})$

e) $x'^2 = -8y'$, parábola, $p = -4$, $F(-1, 0)$, diretriz: $y = 4$

f) $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$, hipérbole, eixo real 4, eixo imaginário 6, $F(3 \pm \sqrt{13}, 0)$

g) $\dfrac{y'^2}{25} - \dfrac{x'^2}{9} = 1$, hipérbole, eixo real 10, eixo imaginário 6, $F(-1, 5 \pm \sqrt{34})$.

Observação – A equação geral do 2º grau a duas variáveis, $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$, onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c é diferente de zero, representa uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole e será estudada como aplicação das formas quadráticas no plano em **Álgebra Linear***.

* Ver Capítulo 7 de Álgebra Linear, **Editora McGraw-Hill**, dos autores.