Comparando (I) com as equações dadas no enunciado, conclui-se que

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$$

é uma solução. Existem outras soluções?

Exercícios

5.10. Mostre que o gráfico de cada uma das equações seguintes reduz-se a um único ponto.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 2yz = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - x - y + 1 = 0$.

5.11. Mostre que o gráfico de

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 8 = 0$$

é o conjunto vazio.

5.12. Esboce os cilindros dados pelas equações

a) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$;
d) $x + y = 0$;

b) $z = y^2 + 2$;
e) $z = \cos y$;

c) $z = x^2 + 2$;
f) $xy = 1$.

5.13. Faça um esboço do sólido delimitado inferiormente pelo plano xy, superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

5.14. Determine a interseção da reta

$$\begin{aligned} x &= 1\\ y &= 2 + t\\ z &= 4, \end{aligned}$$

com o cilindro $y = x^2$.

5.15. Reduza cada uma das equações seguintes à forma canônica e identifique e esboce a quádrica que ela representa.

a) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$;
e) $z = 4x^2 + y^2$;

b) $36x^2 + y^2 + 9z^2 = 9$;
f) $16z = 4x^2 - y^2$;

c) $3x^2 - 8y^2 + 4z^2 = 1$;
g) $y^2 = x^2 + z^2$;

d) $3x^2 - 8y^2 - 4z^2 = 1$;
h) $z^2 = x^2 + 2y^2$.

5.16. Encontre uma superfície tal, que sua interseção com planos da forma $x = k$ dá a elipse

$$\frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{9}=k^2,$$

com planos da forma $y = k$, dá a hipérbole

$$9x^2-\frac{9z^2}{4}=k^2,$$

e, com planos da forma $z = k$, dá a hipérbole

$$4x^2-\frac{4y^2}{9}=k^2.$$

5.17. Deduza uma equação do parabolóide de revolução, de vértice na origem, sabendo que sua interseção com o plano $z = 1$ é a circunferência de centro (0, 0, 1) e raio 3.

5.18. Deduza uma equação do parabolóide, de vértice na origem, que contém a elipse cujos vértices são $A(\sqrt{6},0,3)$, $A_1(-\sqrt{6},0,3)$, $B(0,3,3)$ e $B_1(0,-3,3)$.

5.19. Escreva uma equação do elipsóide que intercepta o plano xy segundo a elipse

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=0,$$

e que contém o ponto (1, 1, 1).

5.20. Escreva uma equação do hiperbolóide de uma folha que intercepta o plano xy segundo a elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=0,$$

e o plano yz segundo hipérbole

$$\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1, \quad x=0.$$

5.21. Determine os focos e os vértices da elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$
$$y=2.$$

5.22. Determine o centro da circunferência dada pela interseção das superfícies

$z=x^2+y^2$
$x^2+y^2+z^2=1.$

5.23. Determine os focos da cônica obtida pela interseção do plano $z=2$ com o cone gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, sendo

$$r: \begin{cases} x=0 \\ y=2z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t. \end{cases}$$

5.24. Determine m para que o cone gerado pela rotação da reta $y=mz$, $x=0$, em torno da reta $y=z$, $x=0$, intercepte o plano $x=1$ segundo a cônica $2yz=1$.

5.3 CURVAS NO ESPAÇO

No estudo das superfícies, apresentado nos parágrafos anteriores, algumas vezes mencionamos curvas no espaço. As cônicas, por exemplo, surgiram ao fazermos interseções das quádricas com os planos coordenados. Em todos os casos, elas ficavam determinadas por pares de equações cartesianas. De modo geral, o gráfico de uma equação cartesiana no espaço é uma superfície, e uma curva no espaço não fica determinada por uma única equação. Determina-se, então, uma curva no espaço pela interseção de duas superfícies. O sistema constituído pelas equações das duas superfícies dá as equações cartesianas da curva.

Exemplo. Focos e vértices da cônica

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$z=2.$$

A cônica é dada pela interseção de um hiperbolóide de uma folha e um plano.

Observação

O gráfico da equação geral $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$ poderá representar quádricas degeneradas. Alguns exemplos são:

a) $x^2 - 16 = 0$; dois planos paralelos: $x = 4$ e $x = -4$.

b) $3y^2 = 0$; um plano: o plano $y = 0$.

c) $x^2 + 2y^2 = 0$; uma reta: o eixo dos z.

d) $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$; um ponto: a origem $(0, 0, 0)$.

e) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = -3$; o conjunto vazio.

8.6 Problemas Propostos

1) Identificar as quádricas representadas pelas equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

d) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

e) $x^2 + z^2 - 4y = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4z = 0$

g) $4x^2 - y^2 = z$

h) $z^2 = x^2 + y^2$

i) $z = x^2 + y^2$

j) $x^2 + y^2 = 9$

l) $y^2 = 4z$

m) $x^2 - 4y^2 = 16$

n) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

o) $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$

p) $16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$

q) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$

r) $2y^2 + 3z^2 - x^2 = 0$

s) $4x^2 + 9y^2 = 36z$

2) Reduzir cada uma das equações à forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa.

a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$

c) $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

e) $x^2 + y^2 - 9z = 0$

f) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$

g) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$

h) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

i) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$

j) $y^2 = x^2 + z^2$

l) $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

m) $x^2 + y + z^2 = 0$

n) $x^2 - 9y^2 = 9$

o) $x^2 - 4y^2 = 0$

3) Representar graficamente as seguintes superfícies cilíndricas:

a) $y = 4 - x^2$

b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 16$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ e $-3 \leqslant z \leqslant 3$

e) $x^2 + y^2 = 9$ e $0 \leqslant z \leqslant 4$

f) $z^2 = 4y$

g) $z = y^2 + 2$

h) $x - y = 0$

4) Determinar a equação de cada uma das superfícies esféricas definidas pelas seguintes condições:

a) Centro $C(2, -3, 1)$ e raio 4.

b) O segmento de extremos $A(-1, 3, -5)$ e $B(5, -1, -3)$ é um de seus diâmetros.

c) Centro $C(4, -1, -2)$ e tangente ao plano xOy.

d) Centro $C(-2, 3, 4)$ e tangente ao eixo dos z.

e) Centro $C(0, -4, 3)$ e tangente ao plano de equação: $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

8.6.1 Respostas de Problemas Propostos

1) *a*) Superfície esférica

b) Elipsóide

c) Hiperbolóide de uma folha

d) Hiperbolóide de duas folhas

e) Parabolóide circular

f) Parabolóide circular

g) Parabolóide hiperbólico

h) Superfície cônica circular

i) Parabolóide circular

j) Superfície cilíndrica circular

l) Superfície cilíndrica parabólica

m) Superfície cilíndrica hiperbólica

n) Parabolóide elíptico

o) Superfície cônica elíptica

p) Hiperbolóide de uma folha

q) Hiperbolóide de duas folhas

r) Superfície cônica elíptica

s) Parabolóide elíptico

2) *a*) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$, elipsóide

b) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, hiperbolóide de uma folha

c) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, hiperbolóide de duas folhas

d) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$, superfície esférica de raio 6

e) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}=9z$, parabolóide circular

f) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{1}=2y$, parabolóide elíptico

g) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$, parabolóide hiperbólico

h) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=0$, superfície cônica

i) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$, hiperbolóide de uma folha

j) $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}-\frac{y^2}{1}=0$, superfície cônica

l) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{1}=1$, elipsóide

m) $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}=-y$, parabolóide circular

n) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$, superfície cilíndrica hiperbólica

o) dois planos: $x=2y$ e $x=-2y$

4) *a)* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 4z + 17 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 16 = 0$

e) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 72y - 54z - 31 = 0$

Impressão e acabamento
Gráfica e Editora FCA
Tel. (011) 419-0200