CURVAS NO PLANO $\mathbb{R}^2$ E NO ESPAÇO $\mathbb{R}^3$

XIMENA MUJICA

1 Definição e Exemplos de Curvas no Plano $\mathbb{R}^2$ e no Espaço $\mathbb{R}^3$.

O que é uma curva? De modo intuitivo, uma curva é um objeto geométrico que pode ser representado por um barbante ou arame fino, isto é, trata-se de um objeto unidimensional, seja no plano ou no espaço. Se o barbante ou arame estiver totalmente esticado, teremos um segmento de reta. Se ele tiver várias partes esticadas, não todas paralelas entre si, teremos uma poligonal. O barbante ou arame também pode estar curvado, ou ter partes curvas e outras retas. Mas, sempre pensamos num único pedaço de barbante ou arame. Como podemos representar um barbante/arame usando matemática? Vejamos a definição formal de curva:

1.1 Definição: Uma *curva*, *caminho* ou *trajetória*, no plano $\mathbb{R}^2$ (espaço $\mathbb{R}^3$), é a imagem de uma função contínua real a valores no plano $\mathbb{R}^2$ (espaço $\mathbb{R}^3$).

NO PLANO $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t)=(x(t),y(t)) \end{array}$$

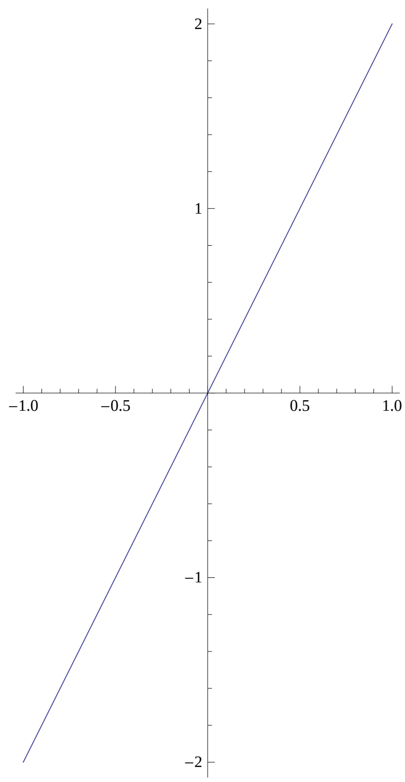
NO ESPAÇO $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t)=(x(t),y(t),z(t)) \end{array}$$

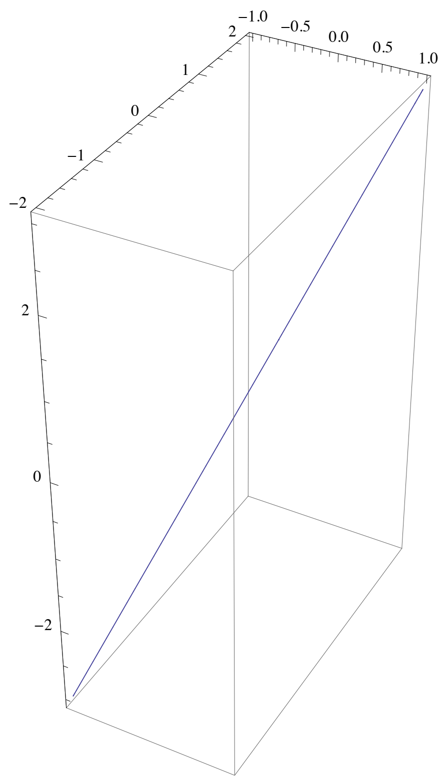
Quando estudamos a representação paramétrica de uma reta, vimos os primeiros exemplos de como parametrizar uma curva, tanto no $\mathbb{R}^2$ quanto no $\mathbb{R}^3$:

1.2 Exemplos: [1]

1. $\gamma(t)=(t,2t)$, $t\in[-1,1]$



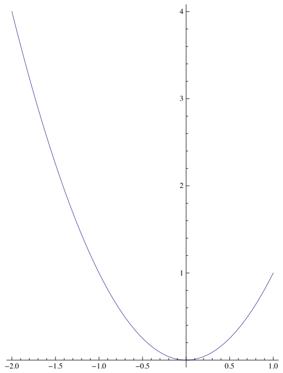
2. $\gamma(t)=(t,2t,3t)$, $t\in[-1,1]$



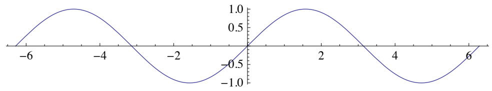
No curso de *Cálculo de Funções uma Variável Real*, certamente já viram muitas curvas que representam gráficos de funções. Agora queremos ver como representar tais curvas, na forma paramétrica:

[1]As figuras aqui apresentadas foram feitas usando o Wolfram *Mathematica*.

3. Arco de curva do gráfico de $f(x) = x^2$, do ponto $(-2,4)$ ao ponto $(1,1)$: $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [-2,1]$

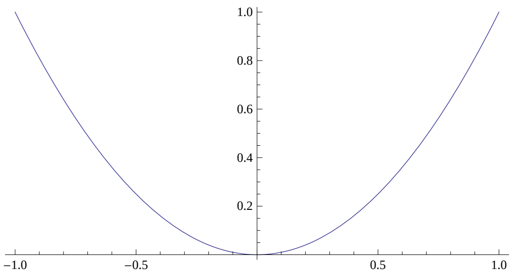


4. Arco de curva do gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, do ponto $(-2\pi,0)$ ao ponto $(2\pi,0)$: $\gamma(t) = (t, \text{sen}(t))$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$

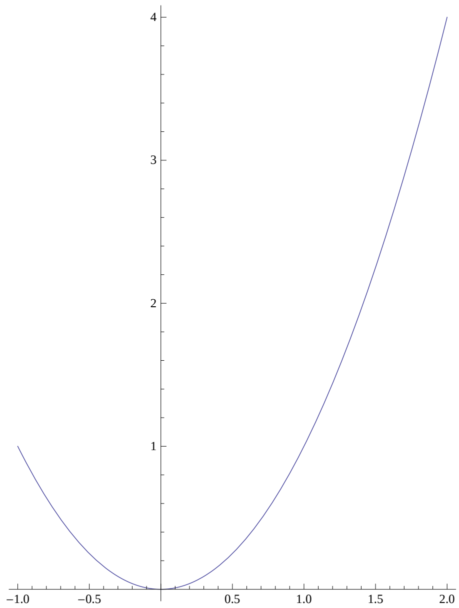


Considere o gráfico da função $f(x) = x^2$. Parametrize o arco da curva desse gráfico como indicado, e faça um esboço da mesma observando as diferenças entre os casos dados:

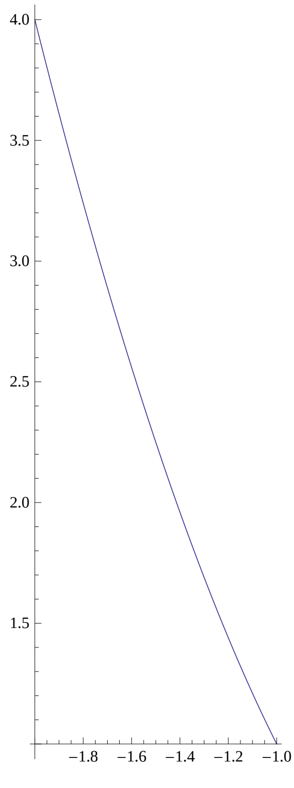
5. do ponto $(-1,1)$ ao ponto $(1,1)$;
$\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1,1]$



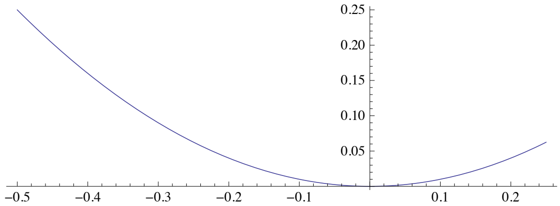
6. do ponto $(-1,1)$ ao ponto $(2,4)$;
$\gamma_5(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1,2]$



7. do ponto $(-2,4)$ ao ponto $(-1,1)$;
$\gamma_3(t) = (t, t^2)$, $t \in [-2,-1]$

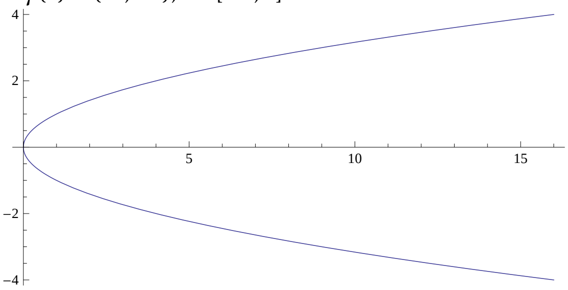


8. do ponto $(-1/16, -1/4)$ ao ponto $(1/2, 1/4)$;
$\gamma_5(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1/4, 1/2]$

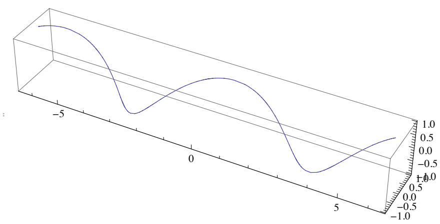


Também há muitas curvas que não se originam de gráficos de funções de uma variável real a valor real:

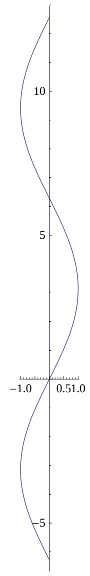
9. $\gamma(t) = (t^2, -t)$, $t \in [-4,4]$



10. $\gamma(t) = (t, \mathrm{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$



11. $\gamma(t) = (\mathrm{sen}(t), 2t)$, $t \in [-\pi, 2\pi]$



1.3 Exercícios: Faça um esboço das curvas parametrizadas a seguir, indicando o sentido:

a) $\gamma(t) = (t, 2t)$, $t \in [1,4]$
b) $\gamma(t) = (2t, t)$, $t \in [1,4]$
c) $\gamma(t) = (-t, t)$, $t \in [-1,1]$
d) $\gamma(t) = (3t, -3t)$, $t \in [-1,1]$
e) $\gamma(t) = (-1, t)$, $t \in [-1,1]$
f) $\gamma(t) = (-1, t^3)$, $t \in [-1,1]$
g) $\gamma(t) = (-1, t/3)$, $t \in [-3,3]$
h) $\gamma(t) = (t, (t/3)^3)$, $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
i) $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,2]$
j) $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \in [0,2]$
k) $\gamma(t) = (-t^2, t^2)$, $t \in [-1,1]$
l) $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in [1,3]$
m) $\gamma(t) = (t^2, -t^2)$, $t \in [-1,1]$
n) $\gamma(t) = (t, \mathrm{sen}(t))$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$
o) $\gamma(t) = (\mathrm{sen}(t), t)$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$
p) $\gamma(t) = (t^2, \mathrm{sen}(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$
q) $\gamma(t) = (-t, \mathrm{sen}(t))$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$
r) $\gamma(t) = (-t^2, \mathrm{sen}(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$
s) $\gamma(t) = (t^2, -t^3)$, $t \in [-1,0]$
t) $\gamma(t) = (-t, (t+1)^2)$, $t \in [-3,0]$
u) $\gamma(t) = (t-1, -e^t)$, $t \in [-1,1]$
v) $\gamma(t) = (e^t, \cos(t))$, $t \in [-1,4]$
w) $\gamma(t) = (e^{-t}, \cos(t))$, $t \in [-1,4]$
x) $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, \pi]$
y) $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in [-\pi, 0]$
z) $\gamma(t) = (\cos(t), -\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, \pi]$

Dica: faça uma tabela, colocando os valores de t com os valores correspondentes de x e y.

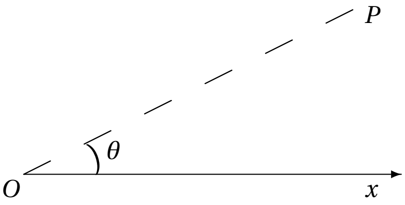
1.4 Exercícios: Para cada função real de uma variável dada abaixo:
i) Faça um esboço do gráfico da função, e escreva a parametrização da forma $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in D_f$;
ii) Faça um esboço da reflexão sobre o eixo Ox do gráfico da função, e dê uma parametrização;
iii) Faça um esboço da reflexão sobre o eixo Oy do gráfico da função, e dê uma parametrização;
iv) Faça um esboço da rotação de ângulo $\theta = \pi/2$ do gráfico da função, e dê uma parametrização;
v) Faça um esboço da rotação de ângulo $\theta = \pi$ do gráfico da função, e dê uma parametrização;
vi) Faça um esboço da rotação de ângulo $\theta = 3\pi/2$ do gráfico da função, e dê uma parametrização;

a) $f(x) = x^2$, $x \in [-1,2]$
b) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $x \in [0, \pi]$
c) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
d) $f(x) = \cos(x)$, $x \in [-\pi/4, \pi/4]$
e) $f(x) = \tan(x)$, $x \in [0, \pi/4]$
f) $f(x) = 1/x$, $x \in [1/2, 2]$
g) $f(x) = -x^2$, $x \in [-1,2]$
h) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0,1]$
i) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0,1]$
j) $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$
k) $f(x) = 1 - x$, $x \in [0,1]$
l) $f(x) = 3x - 1$, $x \in [0,1]$
m) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1,4]$
n) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in [2,5]$
o) $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, e]$
p) $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$
q) $f(x) = -\sqrt{x^2}$, $x \in [1,4]$
r) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$, $x \in [2,5]$
s) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \in [3/2, 3]$
t) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \in [-1/2, 1]$
u) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in [3/2, 3]$
v) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, $x \in [-1/2, 1]$

Dicas:
1. mantenha o domínio, e procure compreender a relação entre as coordenadas da parametrização original com as da nova parametrização.
2. O sentido positivo do ângulo da rotação é anti-horário, como veremos a seguir ao estudar as coordenadas polares.

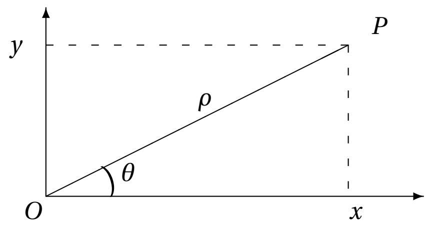
2 Coordenadas Polares

A fim de representar todo tipo de curva no espaço $\mathbb{R}^2$, é útil conhecer as *coordenadas polares*: fixado um semi-eixo Ox, chamado *eixo polar* e o ponto O chamado *pólo*, cada ponto P do plano fica determinado por suas *coordenadas polares* (θ, ρ), onde θ é a medida em radianos do ângulo entre o eixo polar e o segmento OP, medido nesse sentido, anti-horário, e ρ é o comprimento do segmento OP; logo, $\rho \geq 0$.



Qual é a relação entre o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, as que habitualmente utilizamos, e as coordenadas polares? Se fizermos coincidir as origens do sistema Oxy de coordenadas cartesianas com o pólo O, e o semi-eixo Ox com o eixo polar, então obtemos a relação ao lado:

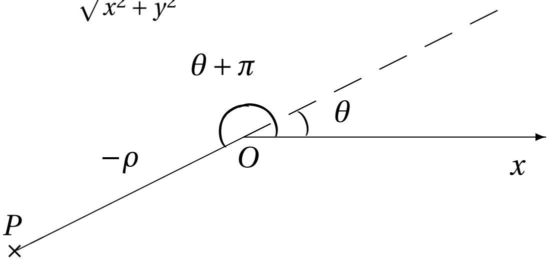
$$x = \rho\cos(\theta)$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$



Se $P(x, y)$ não coincide com o pólo, então

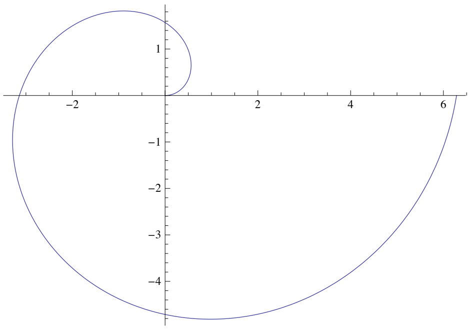
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Se quisermos que a representação de cada ponto no plano seja única, é necessário utilizar $\rho > 0$. No entanto, para diversas aplicações é útil usar $\rho \leq 0$. Nesse caso como interpretar (ρ, θ)? Para $\rho < 0$ identificaremos (ρ, θ) com seu simétrico em relação ao pólo, $(-\rho, \theta + \pi)$, que está bem definido, uma vez que $-\rho > 0$.

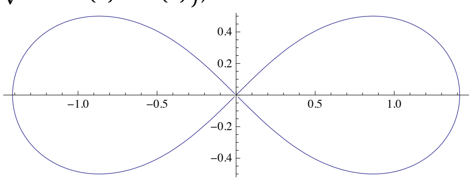


2.1 Exemplos:

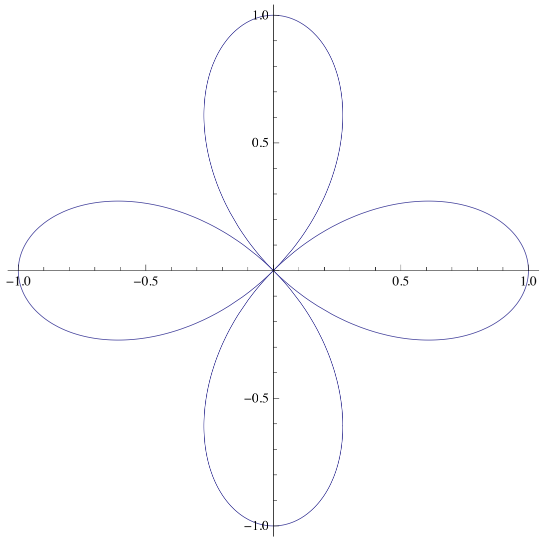
1. Espiral: $\gamma(t) = \big(t\cos(t)\,,\, t\,\mathrm{sen}(t)\big)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



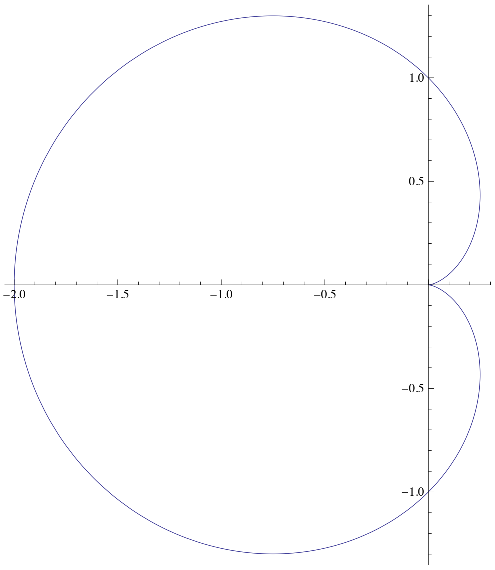
2. Lemniscata: $\gamma(t) = \big(\sqrt{2\cos^2(t)}\,\cos(t)\,,\ \sqrt{2\cos^2(t)}\,\mathrm{sen}(t)\big)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



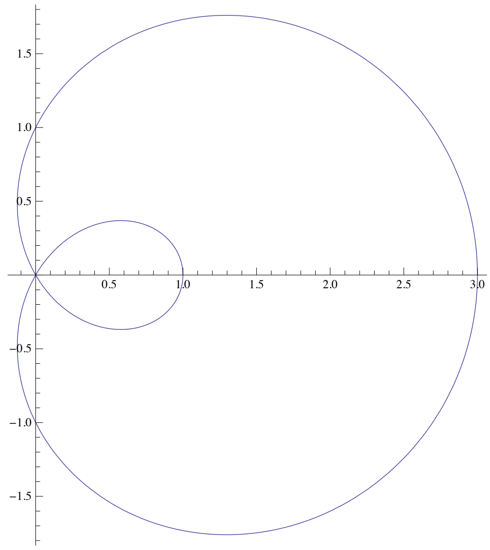
3. Rosácea de 4 folhas:
$\gamma(t) = \big(\cos(2t)\,\cos(t)\,,\,\cos(2t)\,\mathrm{sen}(t)\big)$,
$0 \leq t \leq 2\pi$



4. Cardióide:
$\gamma(t) = \big((1-\cos(t))\cos(t), (1-\cos(t))\operatorname{sen}(t)\big)$,
$0 \le t \le 2\pi$



5. Limaçon:
$\gamma(t) = \big((1+2\cos(t))\cos(t), (1+2\cos(t))\operatorname{sen}(t)\big)$,
$0 \le t \le 2\pi$



2.2 Exercícios: *Coordenadas Polares.* Faça um esboço das curvas parametrizadas a seguir, indicando o sentido, bem como os pontos inicial e final da curva:

a) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi]$
b) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi,\pi/6]$
c) $\gamma(t) = (1-\cos(-t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi]$
d) $\gamma(t) = (\cos(t), 2+\operatorname{sen}(-t))$, $t \in [0,\pi]$
e) $\gamma(t) = (2+\cos(t), 1-\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/4]$
f) $\gamma(t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t))$, $t \in [0,\pi/4]$
g) $\gamma(t) = (\cos(2t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/4]$
h) $\gamma(t) = (\cos(t/2), \operatorname{sen}(t/2))$, $t \in [0,\pi/4]$
i) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi/2,\pi/2]$
j) $\gamma(t) = (\cos^2(t), \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in [-\pi/2,\pi/2]$
k) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
l) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in [0,\pi/2]$
m) $\gamma(t) = (t2\operatorname{sen}(t), t\cos(2t))$, $t \in [0,\pi/2]$
n) $\gamma(t) = (t/2\operatorname{sen}(t), t/2\cos(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
o) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}^2 t, 1-\cos^2(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
p) $\gamma(t) = (e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,2\pi]$
q) $\gamma(t) = (e^t 4\cos(t), e^t 4\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,2\pi]$
r) $\gamma(t) = (e^{1/t}4\cos(t), e^{1/t}4\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,2\pi]$
s) $\gamma(t) = (t^2\cos(2\pi t), t^2\operatorname{sen}(2\pi t))$, $t \in [0,1]$
t) $\gamma(t) = (t^2 4\cos(t), t^2 4\operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi/4,\pi/4]$
u) $\gamma(t) = (e^{1/t}4\cos(t), e^{1/t}4\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,2\pi]$
v) $\gamma(t) = (\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
w) $\gamma(t) = (\cos(3t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
x) $\gamma(t) = (1-\cos(t), 2-2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
y) $\gamma(t) = (3\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/2]$
z) $\gamma(t) = (2-3\cos(t), 2-2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi/2]$

3 Cônicas

Uma *cônica* no espaço $\mathbb{R}^2$ é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas (x, y) satisfazem uma equação de segundo grau em duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3:eq1}$$

onde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

A equação (3:eq1) é chamada *equação geral da cônica.*

Também se diz que as cônicas são curvas obtidas em $\mathbb{R}^3$ a partir da interseção de um cone com um plano - esta é uma definição geométrica, enquanto que a anterior é uma definição algébrica. Dependendo da posição relativa entre o cone e o plano, pode-se obter: i) uma elipse (em particular está a circunferência), ii) uma hipérboles, iii) uma parábola, iv) duas retas concorrentes, v) uma única reta e vi) um ponto. Porém, nesta segunda definição estão ausentes as soluções vii) duas retas paralelas e viii) o conjunto vazio, que também são soluções da equação (3:eq1), e portanto também são cônicas. Abaixo vemos exemplos de equações das mesmas:

(i) elipse: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

(ii) hipérbole: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

(iii) parábola: $y = 4x^2$;

(iv) duas retas concorrentes: $x^2 = y^2$;

(v) uma reta: $x^2 = 0$;

(vi) um ponto: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 0$;

(vii) duas retas paralelas: $x^2 = 1$;

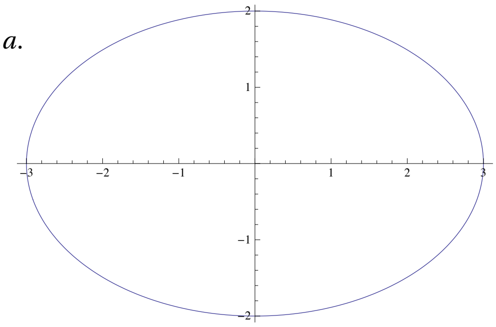
(viii) o conjunto vazio: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = -1$.

A seguir estudaremos as cônica mais famosas, a partir de suas definições geométricas no $\mathbb{R}^2$:

3.1 Elipse

Uma *elipse*, no espaço $\mathbb{R}^2$, é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias a dois pontos dados (os *focos* F_1 e F_2) é constante (a distância $2a$).

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a.$$



Chame $2c=d(F_1,F_2)$ (*distância focal*), e seja b tal que $b^2+c^2=a^2$. Se os focos estiverem situados no eixo x e simétricos em relação ao eixo y, então é possível reescrever a equação acima na forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que é chamada *equação reduzida da elipse*.

Já que uma elipse é uma curva, queremos encontrar uma parametrização para a mesma. Façamos a conveniente mudança de variáveis $\frac{x}{a}=\cos(t)$ e $\frac{y}{b}=\operatorname{sen}(t)$. Utilizando as coordenadas polares, de modo que obtemos $x(t)=a\cos(t)$ e $y(t)=b\operatorname{sen}(t)$, e portanto uma parametrização é: $\gamma(t)=(a\cos(t)\,,b\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$

3.1 Exercícios: Encontre uma parametrização para cada elipse dada e faça seu esboço:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$
d) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$
e) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$
f) $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{36}=1$

3.2 Exercícios: Para cada elipse parametrizada a seguir, encontre a equação reduzida correspondente e faça seu esboço:

a) $\gamma(t)=(\cos(t)\,,2\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$
b) $\gamma(t)=(3\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$
c) $\gamma(t)=(1-\cos(t)\,,2-2\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$
d) $\gamma(t)=(3\cos(t)\,,2\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$
e) $\gamma(t)=(2-3\cos(t)\,,2-2\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$
f) $\gamma(t)=(2+3\cos(t)\,,3-4\operatorname{sen}(t))$, $t\in[0,2\pi]$

Completamento de Quadrados

Será muito útil relembrar um produto notável: o quadrado da soma (diferença). Sabemos que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \text{e} \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Assim, ao encontrar uma expressão na forma

$$a^2\pm 2ab$$

queremos re-escrevê-la de modo que apareça um quadrado de soma (diferença):

$$a^2\pm 2ab=a^2\pm 2ab+b^2-b^2=(a^2\pm 2ab+b^2)-b^2=(a\pm b)^2-b^2$$

3.3 Exemplos:

1. $9x^2+6x \;=\; 3^2x^2+2.(3x).1+1^2-1^2 \;=\; \left(3^2x^2+2.(3x).1+1^2\right)-1^2 \;=\; (3x+1)^2-1$

2. $y^2-6y \;=\; y^2-2.y.3+3^2-3^2 \;=\; \left(y^2-2.y.3+3^2\right)-3^2 \;=\; (y-3)^2-3^2 \;=\; (y-3)^2-9$

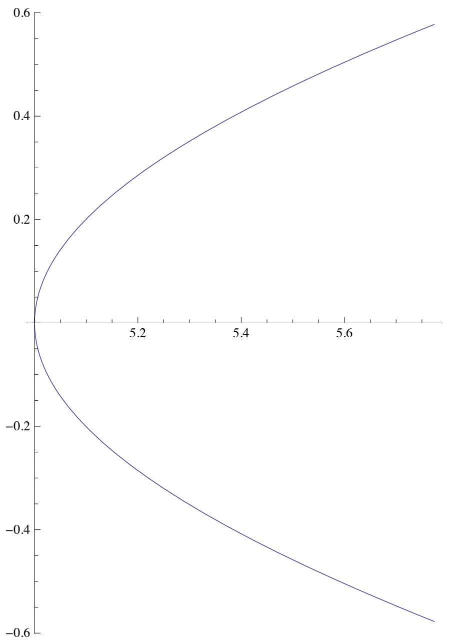
3. $4x^2-4x+3 \;=\; 2^2x^2-2.(2x).1+1^2-1^2+3 \;=\; \left(2^2x^2-2.(2x).1+1^2\right)-1^2+3 \;=\; (2x-1)^2+2$

4. $4y^2-2x-5 \;=\; 2^2y^2-2.(2y).\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-5 \;=\; \left(2^2y^2-2.(2y).\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2-5 \;=\; \left(2y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$

3.4 Exercícios: Encontre a equação reduzida, via completamento de quadrados, e translação adequados, e faça seu esboço:

a) $25x^2+9y^2-225=0$
b) $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$
c) $16x^2+4y^2+64x+16y+16=0$
d) $16x^2+9y^2+32x+18y-119=0$
e) $4x^2+y^2+16x+4y+4=0$
f) $9x^2+16y^2-54x+96y+81=0$

3.2 Hipérbole



Uma *hipérbole* no espaço $\mathbb{R}^2$ é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ cuja diferença das distâncias a dois pontos dados (os *focos* F_1 e F_2) é constante (a distância $2a$).

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a.$$

Chame $2c = d(F_1,F_2)$ (*distância focal*), e seja b tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Se os focos estiverem situados no eixo x e forem simétricos em relação ao eixo y, então é possível reescrever a equação acima na forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é chamada *equação reduzida da hipérbole.*

Também queremos encontrar uma parametrização para a hipérbole. Desta vez utilizaremos outra identidade trigonométrica: $\sec^2(t) = \tan^2(t) + 1$ que pode ser reescrita como $\sec^2(t) - \tan^2(t) = 1$. Agora fazemos a conveniente mudança de variáveis $\frac{x}{a} = \sec(t)$ e $\frac{y}{b} = \tan(t)$, obtendo $x(t) = a\sec(t)$ e $y(t) = b\tan(t)$, e portanto uma parametrização é: $\gamma(t) = (a\sec(t), b\tan(t))$, $t \in [0,2\pi]$.

Note que a hipérbole é constituída por duas curvas, simétricas em relação a um eixo central (que é a mediatriz dos focos!), denominadas *folhas*, e só é possível parametrizar uma por vez.

3.5 Exercícios: Encontre uma parametrização para cada hipérbole dada e faça seu esboço:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
b) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
c) $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$
d) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
e) $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
f) $-\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

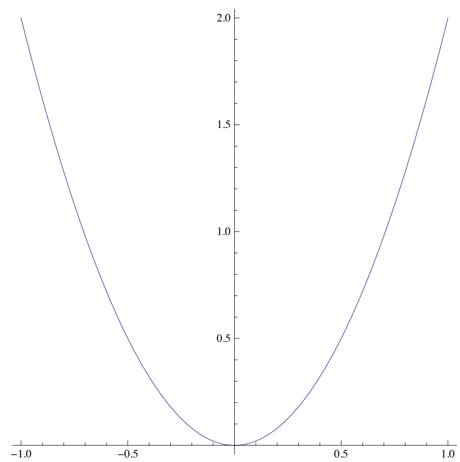
3.6 Exercícios: Para cada hipérbole parametrizada a seguir, encontre a equação reduzida correspondente e faça seu esboço:

a) $\gamma(t) = (\sec(t), 2\tan(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
b) $\gamma(t) = (3\sec(t), \tan(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
c) $\gamma(t) = (1 - \sec(t), 2 - 2\tan(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
d) $\gamma(t) = (3\sec(t), 2\tan(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
e) $\gamma(t) = (2 - 3\sec(t), 2 - 2\tan(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
f) $\gamma(t) = (2 + 3\sec(t), 3 - 4\tan(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
g) $\gamma(t) = (\sec(t), 2\tan(t))$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$
h) $\gamma(t) = (3\sec(t), \tan(t))$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$
i) $\gamma(t) = (1 - \sec(t), 2 - 2\tan(t))$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$
j) $\gamma(t) = (3\sec(t), 2\tan(t))$, $t \in [-3\pi/2, -\pi/2]$
k) $\gamma(t) = (2 - 3\sec(t), 2 - 2\tan(t))$, $t \in [-3\pi/2, -\pi/2]$
l) $\gamma(t) = (2 + 3\sec(t), 3 - 4\tan(t))$, $t \in [-3\pi/2, -\pi/2]$

3.7 Exercícios: Encontre a equação reduzida, via completamento de quadrados, e translação adequados, e faça seu esboço:

a) $25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$
b) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$
c) $16x^2 - 4y^2 + 64x - 16y - 16 = 0$
d) $-16x^2 + 9y^2 - 32x + 18y - 151 = 0$
e) $4x^2 - y^2 + 16x - 4y - 4 = 0$
f) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 96y + 33 = 0$

3.3 Parábola



Uma *parábola* no espaço $\mathbb{R}^2$ é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ que equidistam de um ponto (o *foco* F) e reta (a *diretriz* r) dados, sendo p a distância de F a d.

$$d(P,F) = d(P,d).$$

Se a diretriz for paralela ao eixo x, e se F estiver sobre o eixo y e acima do eixo x, então é possível reescrever a equação acima na forma

$$x^2 = 2py$$

que é chamada *equação reduzida da parábola.*

Também queremos encontrar uma parametrização para a parábola. Basta fazer $x = t$, e $y = t^2/(2p)$, obtendo: $\gamma(t) = (t, t^2/(2p))$, $t \in \mathbb{R}$.

3.8 Exercícios: Encontre uma parametrização para cada parábola dada e faça seu esboço:

a) $x^2 = y$
b) $y^2 = 2x$
c) $x^2 = -6y$
d) $(x-1)^2 = y+2$
e) $-(y+1)^2 = 2(x-2)$
f) $(x+3)^2 = -6(y+1)$

3.9 Exercícios: Para cada parábola parametrizada a seguir, encontre a equação reduzida correspondente e faça seu esboço:

a) $\gamma(t) = (t, 3t^2),\ t \in [0,1]$
b) $\gamma(t) = (-2t, t^2),\ t \in [-1,1]$
c) $\gamma(t) = (t^2, 2-t),\ t \in [-1,2]$
d) $\gamma(t) = ((t-1)^2, 3t),\ t \in [-2,2]$
e) $\gamma(t) = (-4t, (t-1/2)^2),\ t \in [0,4]$
f) $\gamma(t) = (2-t, 3(t+1)^2),\ t \in [-2,1]$

3.10 Exercícios: Encontre a equação reduzida, via completamento de quadrados, e translação adequados, e faça seu esboço:

a) $x^2 + 4x - y + 5 = 0$
b) $x^2 - 2x - y + 3 = 0$
c) $y^2 - x - 4y + 1 = 0$
d) $y^2 - x + 6y + 11 = 0$
e) $x^2 - 10x - 2y + 23 = 0$
f) $y^2 + 3x - 12y + 48 = 0$

4 Mudança de Parâmetro

Queremos representar todo tipo de curva, e para descrevê-la devemos levar em conta: i) sua imagem; ii) o sentido a percorrê-la; iii) seu domínio.

Em muitos problemas de física/engenharia a parametrização de uma curva poderá representar a trajetória de um objeto em função do tempo, e daí será possível calcular a posição e velocidade instantâneas do mesmo, bem como o comprimento do percurso percorrido - essas informações poderão variar segundo a parametrização escolhida. Por isso, ao dizer que γ é uma *curva orientada*, referimo-nos não apenas a sua imagem, mas também ao sentido em que a percorremos, na medida em que t varia em seu domínio.

OBS: o domínio sempre é percorrido em sentido crescente!!!

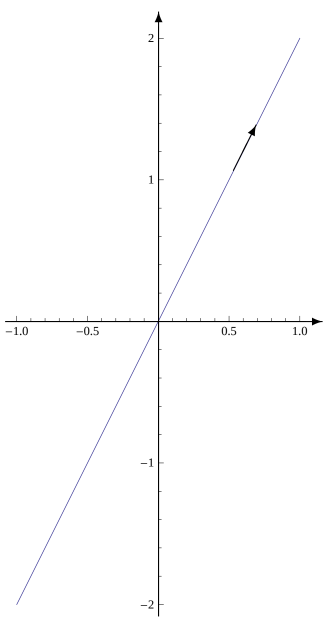
A seguir veremos parametrizações distintas, que apresentam a mesma imagem. Ou seja, estamos representando a mesma curva $C = Im(\gamma_1) = Im(\gamma_2) = Im(\gamma_3)$, de modos diferentes:

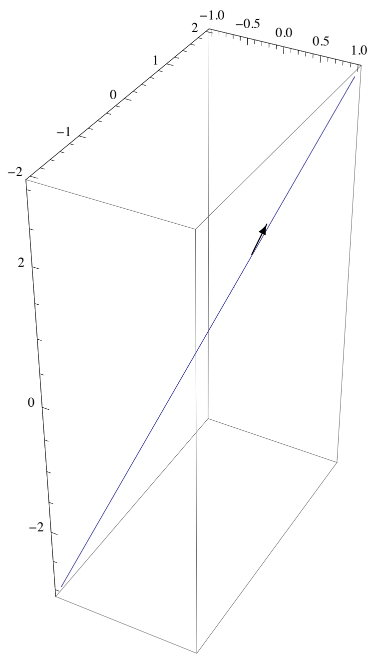
4.1 Exemplos:

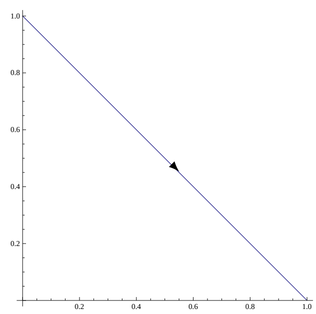
1. $\gamma_1(t) = (t, 2t),\ t \in [-1,1]$;
$\gamma_2(t) = (t/2, t),\ t \in [-2,2]$;
$\gamma_3(t) = (t^3, 2t^3),\ t \in [-1,1]$.

2. $\gamma_1(t) = (t, 2t, 3t),\ t \in [-1,1]$;
$\gamma_2(t) = (3t, 6t, 9t),\ t \in [-1/3, 1/3]$;
$\gamma_3(t) = (t^3, 2t^3, 3t^3),\ t \in [-1,1]$.

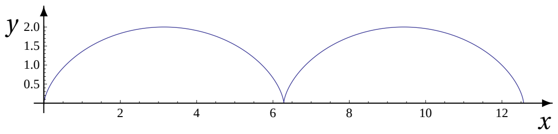
3. $\gamma_1(t) = (t, 1-t),\ t \in [0,1]$;
$\gamma_2(t) = (\text{sen}^2 t\, t, \cos^2 t),\ t \in [0, \pi/2]$;
$\gamma_3(t) = (\cos^2 t, \text{sen}^2 t\, t),\ t \in [\pi/2, \pi]$.



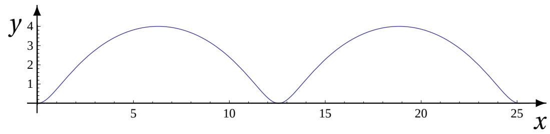




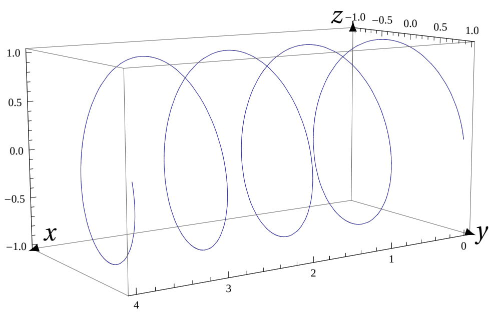
4. $\gamma_1(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t)),\ t \in [0, 4\pi]$;
$\gamma_2(t) = (t^2 - \text{sen}(t)^2, 1 - \cos(t)^2),\ t \in [0, 2\sqrt{\pi}]$.



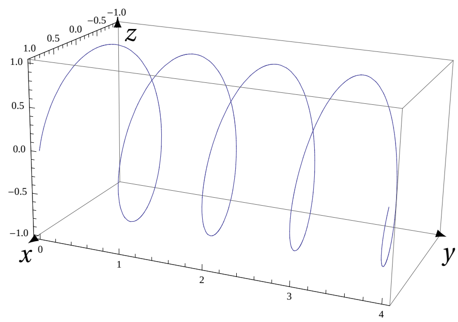
5. $\gamma_1(t) = (2t - \text{sen}(t), 2 - 2\cos(t)),\ t \in [0, 4\pi]$;
$\gamma_2(t) = (2\sqrt{t} - \text{sen}(\sqrt{t}), 2 - 2\cos(\sqrt{t})),\ t \in [0, 16\pi^2]$.



6. $\gamma_1(t) = (t/\pi, \cos(2t), 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 4\pi]$;
$\gamma_2(t) = (t, \cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t)),\ t \in [0, 4]$.



7. $\gamma_1(t) = (\cos(2t), t/\pi, 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 4\pi]$;
$\gamma_2(t) = (\cos(2\pi t), t, \text{sen}(2\pi t)),\ t \in [0, 4]$.



4.2 Definição: Dizemos que $\bar{\gamma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^2$(ou $\mathbb{R}^3$) foi obtida a partir de $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$(ou $\mathbb{R}^3$) por uma *mudança de parâmetro que conserva a orientação*, se existe uma função $g : [\bar{a}, \bar{b}] \to [a, b]$ sobrejetiva, contínua e estritamente crescente, tal que $\bar{\gamma}(u) = \gamma \circ g(u) = \gamma\big(g(u)\big)$.

Vejamos nos exemplos 1. a 7. quais foram as mudanças de parâmetros utilizadas:

4.3 Exemplos:

1. $\gamma_1(t) = (t, 2t),\ t \in [-1, 1]$,
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [-2,2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & u & \longmapsto & u/2 \end{array}$$
$\gamma_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (u/2, u)$
$$\begin{array}{rccc} g_3 : & [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & u & \longmapsto & u^3 \end{array}$$
$\gamma_3(u) = \gamma_1 \circ g_3(u) = (u^3, 2u^3)$

2. $\gamma_1(t) = (t, 2t, 3t),\ t \in [-1, 1]$
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [-1/3,1/3] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & u & \longmapsto & 3u \end{array}$$
$\gamma_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (3u, 6u, 9u)$
$$\begin{array}{rccc} g_3 : & [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & u & \longmapsto & u^3 \end{array}$$
$\gamma_3(u) = \gamma_1 \circ g_3(u) = (u^3, 2u^3, 3u^3)$

3. $\gamma_1(t) = (t, 1 - t),\ t \in [0, 1]$,
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [0,\pi/2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & u & \longmapsto & \text{sen}^2 u \end{array}$$
$\gamma_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (\text{sen}^2 u, \cos^2 u)$
$$\begin{array}{rccc} g_3 : & [\pi/2,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & u & \longmapsto & \cos^2 u \end{array}$$
$\gamma_3(u) = \gamma_1 \circ g_3(u) = (\cos^2 u, \text{sen}^2 u)$

4. $\gamma_1(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t)),\ t \in [0, 4\pi]$,
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [0,2\sqrt{\pi}] & \longrightarrow & [0,2\sqrt{\pi}] \\ & u & \longmapsto & u^2 \end{array}$$
$\gamma_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (u^2 - \text{sen}(u)^2, 1 - \cos(u)^2)$

5. $\gamma_1(t) = (2t - \text{sen}(t), 2 - 2\cos(t)),\ t \in [0, 4\pi]$,
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [0,16\pi^2] & \longrightarrow & [0,4\pi] \\ & u & \longmapsto & \sqrt{u} \end{array}$$
$\gamma_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (2\sqrt{u} - \text{sen}(\sqrt{u}), 2 - 2\cos(\sqrt{u}))$

6. $\gamma_1(t) = (t/\pi, \cos(2t), 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 4\pi]$,
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [0,4] & \longrightarrow & [0,4\pi] \\ & u & \longmapsto & \pi u \end{array}$$
$\gamma_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (u, \cos(2\pi u), \text{sen}(2\pi u))$

7. $\gamma_1(t) = (\cos(2)\,t, t/\pi, 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 4\pi]$;
$$\begin{array}{rccc} g_2 : & [0,4] & \longrightarrow & [0,4\pi] \\ & u & \longmapsto & u/2 \end{array}$$
$\gamma_2(u) = (\cos(2\pi u), u, \text{sen}(2\pi u)),\ u \in [0, 4]$.

4.4 Exercícios: *Mudança de Parâmetro que Preserva o Sentido.* Faça uma mudança de parâmetro, definindo cada curva no intervalo $[0, 1]$:

a) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi, 0]$
b) $\gamma(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi]$
c) $\gamma(t) = (t^2, -t^3)$, $t \in [-1, 0]$
d) $\gamma(t) = (-t, (t+1)^2)$, $t \in [-3, 0]$
e) $\gamma(t) = (-t^2, t^2)$, $t \in [-1, 1]$
f) $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in [1, 3]$
g) $\gamma(t) = (3\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi/2]$
h) $\gamma(t) = (2 - 3\cos(t), 2 - 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi/2]$
i) $\gamma(t) = (2 - 3\cos(t), 2 - 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
j) $\gamma(t) = (2 + 3\cos(t), 3 - 4\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
k) $\gamma(t) = (2 - 3\sec(t), 2 - 2\tan(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
l) $\gamma(t) = (2 + 3\sec(t), 3 - 4\tan(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
m) $\gamma(t) = (-4t, (t - 1/2)^2)$, $t \in [0, 4]$
n) $\gamma(t) = (2 - t, 3(t+1)^2)$, $t \in [-2, 1]$

Mas, se quisermos inverter o sentido em que a curva é percorrida:

4.5 Definição: Dizemos que $\bar{\gamma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^2$(ou $\mathbb{R}^3$) foi obtida a partir de $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$(ou $\mathbb{R}^3$) por uma *mudança de parâmetro que inverte a orientação*, se existe uma função $g : [\bar{a}, \bar{b}] \to [a, b]$ sobrejetiva, contínua e estritamente decrescente, tal que $\bar{\gamma}(u) = \gamma \circ g(u) = \gamma\big(g(u)\big)$.

Vejamos nos exemplos 1. a 7. como inverter os sentidos percorridos:

4.6 Exemplos:

1. $\gamma_1(t) = (t, 2t)$, $t \in [-1, 1]$:
$h_1 : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $u \longmapsto -u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (-u, -2u)$;
$h_2 : [-2,2] \longrightarrow [-1,1]$, $u \longmapsto -u/2$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ h_2(u) = (-u/2, -u)$;
$h_3 : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $u \longmapsto -u^3$
$\bar{\gamma}_3(u) = \bar{\gamma}_1 \circ h_3(u) = (-u^3, -2u^3)$.

2. $\gamma_1(t) = (t, 2t, 3t)$, $t \in [-1, 1]$:
$h_1 : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $u \longmapsto -u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (-u, -2u, -3u)$;
$h_2 : [-1/3, 1/3] \longrightarrow [-1,1]$, $u \longmapsto -3u$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ h_2(u) = (-3u, -6u, -9u)$
$h_3 : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $u \longmapsto -u^3$
$\bar{\gamma}_3(u) = \gamma_1 \circ h_3(u) = (-u^3, -2u^3, -3u^3)$

3. $\gamma_1(t) = (t, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$,
$h_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $u \longmapsto 1 - u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (1 - u, u)$;
$h_2 : [0, \pi/2] \longrightarrow [0,1]$, $u \longmapsto 1 - \operatorname{sen}^2 t\, u$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ h_2(u) = (1 - \operatorname{sen}^2 t\, u, \operatorname{sen}^2 t\, u)$
$h_3 : [\pi/2, \pi] \longrightarrow [0,1]$, $u \longmapsto 1 + \cos^2 u$
$\bar{\gamma}_3(u) = \gamma_1 \circ h_3(u) = (1 + \cos^2 u, -\cos^2 u)$

4. $\gamma_1(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 4\pi]$,
$h_1 : [0, 4\pi] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (4\pi - u + \operatorname{sen}(u), 1 - \cos(u))$;
$h_2 : [0, 2\sqrt{\pi}] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - u^2$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ h_2(u) = (4\pi - u^2 - \operatorname{sen}(u)^2, 1 - \cos(u)^2)$

5. $\gamma_1(t) = (2t - \operatorname{sen}(t), 2 - 2\cos(t))$, $t \in [0, 4\pi]$,
$h_1 : [0, 4\pi] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (8\pi - 2u + \operatorname{sen}(u), 2 - 2\cos(u))$;
$h_2 : [0, 16\pi^2] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - \sqrt{u}$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ h_2(u) = (8\pi - 2\sqrt{u} - \operatorname{sen}(\sqrt{u}), 2 - 2\cos(\sqrt{u}))$

6. $\gamma_1(t) = (t/\pi, \cos(2t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 4\pi]$,
$h_1 : [0, 4\pi] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (4 - u/\pi, \cos(2u), -\operatorname{sen}(2)\, u)$;
$h_2 : [0, 4] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - \pi u$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (4 - 4u/\pi, \cos(2\pi u), -\operatorname{sen}(2\pi u))$

7. $\gamma_1(t) = (\cos(2)\, t, t/\pi, 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 4\pi]$;
$h_1 : [0, 4\pi] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - u$
$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1 \circ h_1(u) = (\cos(2u), 4 - 4u/\pi, -\operatorname{sen}(2)\, u)$;
$h_2 : [0, 4] \longrightarrow [0, 4\pi]$, $u \longmapsto 4\pi - \pi u$
$\bar{\gamma}_2(u) = \gamma_1 \circ g_2(u) = (\cos(2\pi u), 4 - 4u/\pi, -\operatorname{sen}(2\pi u))$

4.7 Exercícios: *Mudança de Parâmetro que Inverte o Sentido.* Para cada parametrização, inverta o sentido percorrido:

a) $\gamma(t) = (t, 2t)$, $t \in [1, 4]$
b) $\gamma(t) = (2t, t)$, $t \in [1, 4]$
c) $\gamma(t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t))$, $t \in [0, \pi/4]$
d) $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi/4]$
e) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi]$
f) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi, \pi/6]$
g) $\gamma(t) = (3\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi/2]$
h) $\gamma(t) = (2 - 3\cos(t), 2 - 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \pi/2]$

i) $\gamma(t) = (\cos(t), 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
j) $\gamma(t) = (3\cos(t), \text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
k) $\gamma(t) = (\sec(t), 2\tan(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
l) $\gamma(t) = (3\sec(t), \tan(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
m) $\gamma(t) = (t, 3t^2),\ t \in [0, 1]$
n) $\gamma(t) = (-2t, t^2),\ t \in [-1, 1]$

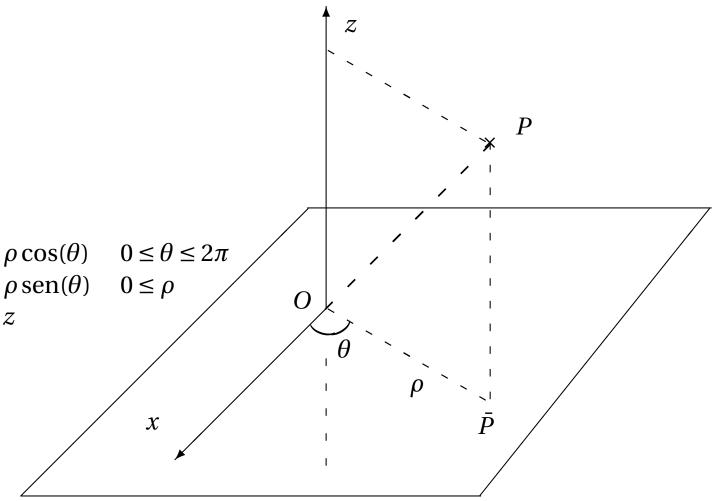
4.8 Exercícios: Para cada parametrização, faça uma mudança de parâmetro que preserve o sentido e outra que inverta o sentido percorrido, sempre definindo cada curva no intervalo $[0,1]$:

a) $\gamma(t) = (-t^2, t^2),\ t \in [-1, 1]$
b) $\gamma(t) = (-t, \text{sen}(t)),\ t \in [-2\pi, 2\pi]$
c) $\gamma(t) = (-t^2, \text{sen}(t)),\ t \in [\pi, \pi]$
d) $\gamma(t) = (1 - \cos(-t), \text{sen}(t)),\ t \in [0, \pi]$
e) $\gamma(t) = (\cos^2(t), \text{sen}^2 t),\ t \in [-\pi/2, \pi/2]$
f) $\gamma(t) = (\text{sen}(t), \cos(t)),\ t \in [0, \pi/2]$
g) $\gamma(t) = (1 - \cos(t), 2 - 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
h) $\gamma(t) = (3\cos(t), 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
i) $\gamma(t) = (1 - \sec(t), 2 - 2\tan(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
j) $\gamma(t) = (3\sec(t), 2\tan(t)),\ t \in [0, 2\pi]$
k) $\gamma(t) = (t^2, 2 - t),\ t \in [-1, 2]$
l) $\gamma(t) = ((t-1)^2, 3t),\ t \in [-2, 2]$

5 Coordenadas Cilíndricas

A fim de representar todo tipo de curva no espaço $\mathbb{R}^3$, é útil conhecer as *coordenadas cilíndricas*: ao plano polar, acrescentamos o eixo Oz, (passando por O, é claro!) e perpendicular a ele. Desse modo, a relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas, é:

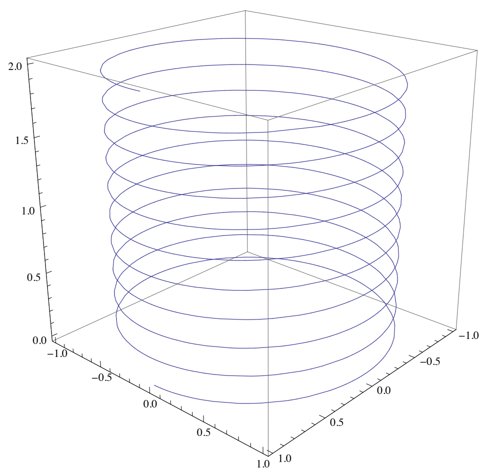
$$x = \rho\cos(\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = \rho\,\text{sen}(\theta) \qquad 0 \le \rho$$
$$z = z$$



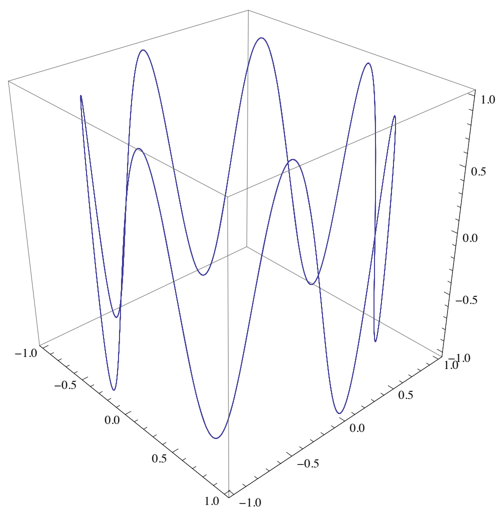
Cada ponto P do espaço fica determinado por suas *coordenadas cilíndricas* (θ, ρ, z), onde θ é a medida em radianos do ângulo entre o eixo polar Ox e o segmento OP, medido nesse sentido, ρ é o comprimento do segmento OP ($\rho \ge 0$), e z é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo Oz.

5.1 Exemplos:

1. $\gamma(t) = (\cos(10t), \text{sen}(10t), t/\pi),\ 0 \le t \le 2\pi$



2. $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), -\text{sen}(7t)),\ 0 \le t \le 2\pi$



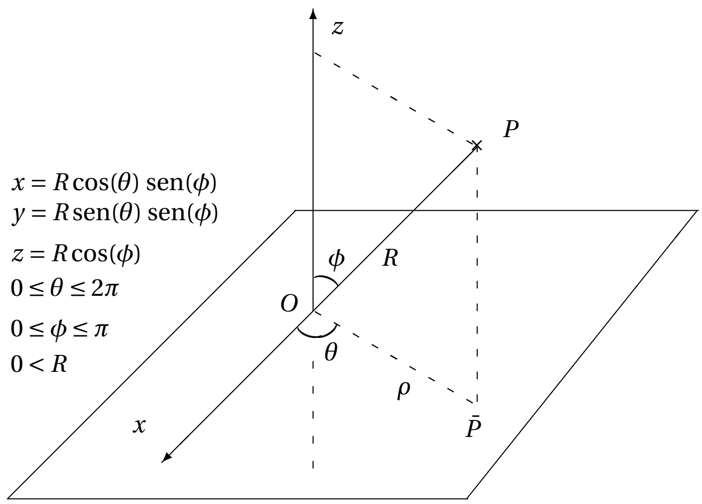
5.2 Exercícios: *Coordenadas Cilíndricas.* Faça um esboço das curvas parametrizadas a seguir, indicando o sentido, bem como os pontos inicial e final da curva:

a) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$, $0 \le t \le 2\pi$
b) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1)$, $0 \le t \le 2\pi$
c) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2)$, $0 \le t \le \pi$
d) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), -1)$, $-\pi \le t \le 0$
e) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $0 \le t \le 2\pi$
f) $\gamma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t), t)$, $0 \le t \le 2\pi$
g) $\gamma(t) = (\cos(0), \operatorname{sen}(0), t)$, $0 \le t \le 1$
h) $\gamma(t) = (\cos(\pi/3), \operatorname{sen}(\pi/3), t/2\pi)$, $0 \le t \le 2\pi$
i) $\gamma(t) = (\cos(t/2), \operatorname{sen}(t/2), t/\pi)$, $0 \le t \le 2\pi$
j) $\gamma(t) = (\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), 0)$, $0 \le t \le 2\pi$
k) $\gamma(t) = (2\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1)$, $0 \le t \le 2\pi$
l) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t^2)$, $0 \le t \le 2\pi$
m) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), e^t)$, $0 \le t \le 2\pi$
n) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t^3)$, $-2\pi \le t \le 2\pi$
o) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), e^{-t})$, $0 \le t \le 10\pi$
p) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \ln(t))$, $0,5 \le t \le 2\pi + 0,5$
q) $\gamma(t) = (\cos(t), t, \operatorname{sen}(t))$, $0 \le t \le \pi$
r) $\gamma(t) = (t, \cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $0 \le t \le \pi$
s) $\gamma(t) = (1/t, \operatorname{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $\pi \le t \le 3\pi$
t) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t), t, \cos(t))$, $0 \le t \le \pi$
u) $\gamma(t) = (\cos(t/2), t/\pi, \operatorname{sen}(t/2))$, $0 \le t \le 2\pi$
v) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t), t^2, \cos(t))$, $0 \le t \le 2\pi$
w) $\gamma(t) = (e^t, \cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $0 \le t \le 2\pi$
x) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t/\pi))$, $-2\pi \le t \le 2\pi$
y) $\gamma(t) = (e^{-t}, \cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $0 \le t \le 10\pi$
z) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t/\pi), \ln(t), \cos(t/\pi))$, $e \le t \le 10\pi$

Dica: procure identificar quem corresponde a θ e ρ.

6 Coordenadas Esféricas

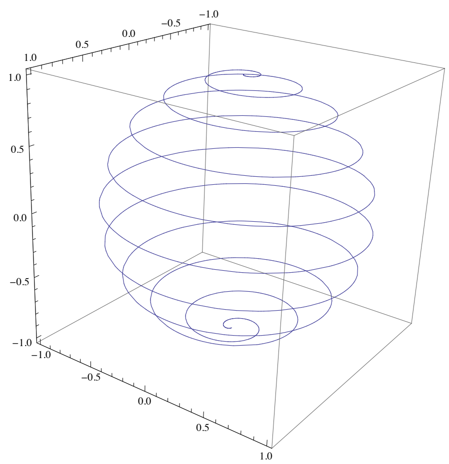
Também são muito úteis as *coordenadas esféricas*: ao plano polar, acrescentamos outro semi-eixo polar Oz, (passando por O, é claro!) e perpendicular a ele. Desse modo, a relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas, é:



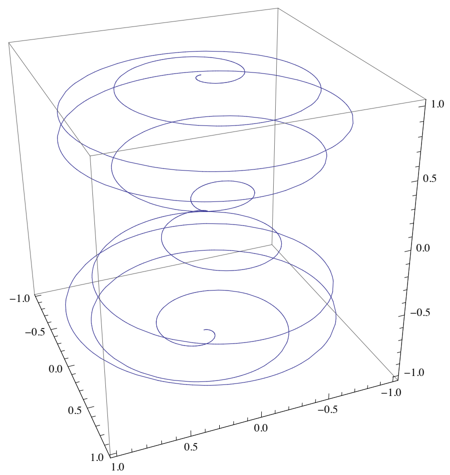
Cada ponto P do espaço fica determinado por suas *coordenadas esféricas* (θ, ϕ, R), onde θ é a medida em radianos do ângulo entre o eixo polar Ox e o segmento OP, ϕ é a medida em radianos do ângulo entre o eixo polar Oz e o segmento OP, e R é o comprimento do segmento OP ($R \ge 0$).

6.1 Exemplos:

1. $\gamma(t) = (\cos(10t)\operatorname{sen}(t/2), \operatorname{sen}(10t)\operatorname{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $0 \le t \le 2\pi$



2. $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t)\cos(10t), \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(10t), \cos(t/2))$, $0 \le t \le 2\pi$



6.2 Exercícios: *Coordenadas Esféricas.* Faça um esboço das curvas parametrizadas a seguir, indicando o sentido, bem como os pontos inicial e final da curva:

a) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi/2), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
b) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(2\pi/3), \text{sen}(t)\,\text{sen}(2\pi/3), \cos(2\pi/3))$, $t \in [0, \pi]$
c) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi/3), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi/3), \cos(\pi/3))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
d) $\gamma(t) = (\cos(7\pi/6)\,\text{sen}(t), \text{sen}(7\pi/6)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
e) $\gamma(t) = (\cos(7\pi/6)\,\text{sen}(t), \text{sen}(7\pi/6)\,\text{sen}(t), -\cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
f) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t/2), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
g) $\gamma(t) = (2\cos(t)\,\text{sen}(t/2), 2\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
h) $\gamma(t) = (\cos(2t)\,\text{sen}(t), \text{sen}(2t)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
i) $\gamma(t) = (\cos(3t)\,\text{sen}(t/2), \text{sen}(3t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
j) $\gamma(t) = (\cos(4t)\,\text{sen}(t/2), \text{sen}(4t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
k) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
l) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(2t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(2t), \cos(2t))$, $t \in [0, \pi]$
m) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(3t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(3t), \cos(3t))$, $t \in [0, \pi]$
n) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
o) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(2t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(2t), \cos(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$
p) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(3t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(3t), \cos(3t))$, $t \in [0, 2\pi]$
q) $\gamma(t) = (\cos(2\pi t)\,\text{sen}(\pi t^2), \text{sen}(2\pi t)\,\text{sen}(\pi t^2), \cos(\pi t^2))$, $t \in [0, 1]$
r) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \cos(\pi e^{-t}))$, $t \in [0, \infty)$
s) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t/2), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
t) $\gamma(t) = (\text{sen}(t), t, \cos(t))$, $0 \le t \le \pi$
u) $\gamma(t) = (\cos(t/2), t/\pi, \text{sen}(t/2))$, $0 \le t \le 2\pi$
v) $\gamma(t) = (\text{sen}(t), t^2, \cos(t))$, $0 \le t \le 2\pi$
w) $\gamma(t) = (e^t, \cos(t), \text{sen}(t))$, $0 \le t \le 2\pi$
x) $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \text{sen}(t/\pi))$, $-2\pi \le t \le 2\pi$
y) $\gamma(t) = (e^{-t}, \cos(t), \text{sen}(t))$, $0 \le t \le 10\pi$
z) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \cos(\pi e^{-t}))$, $t \in [0, \infty)$

Dica: procure identificar quem corresponde a θ, ϕ e R.

6.3 Exercícios: *Miscelânea.* Faça um esboço das curvas parametrizadas a seguir, indicando o sentido, bem como os pontos inicial e final da curva:

a) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi/2), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
b) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(2\pi/3), \text{sen}(t)\,\text{sen}(2\pi/3), \cos(2\pi/3))$, $t \in [0, \pi]$
c) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi/3), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi/3), \cos(\pi/3))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
d) $\gamma(t) = (\cos(7\pi/6)\,\text{sen}(t), \text{sen}(7\pi/6)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
e) $\gamma(t) = (\cos(7\pi/6)\,\text{sen}(t), \text{sen}(7\pi/6)\,\text{sen}(t), -\cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
f) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t/2), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
g) $\gamma(t) = (2\cos(t)\,\text{sen}(t/2), 2\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
h) $\gamma(t) = (2\cos(t)\,\text{sen}(t), 2\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
i) $\gamma(t) = (3\cos(t)\,\text{sen}(t/2), 3\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
j) $\gamma(t) = (4\cos(t)\,\text{sen}(t/2), 4\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
k) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$
l) $\gamma(t) = (\cos(t)\,2\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,2\,\text{sen}(t), \cos(2t))$, $t \in [0, \pi]$
m) $\gamma(t) = (\cos(t)\,3\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,3\,\text{sen}(t), \cos(3t))$, $t \in [0, \pi]$
n) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
o) $\gamma(t) = (\cos(t)\,2\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,2\,\text{sen}(t), \cos(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$
p) $\gamma(t) = (\cos(t)\,3\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)\,3\,\text{sen}(t), \cos(3t))$, $t \in [0, 2\pi]$
q) $\gamma(t) = (\cos(2\pi t)\,\text{sen}(\pi t^2), \text{sen}(2\pi t)\,\text{sen}(\pi t^2), \cos(\pi t^2))$, $t \in [0, 1]$
r) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \cos(\pi e^{-t}))$, $t \in [0, \infty)$
s) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(t/2), \text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$
t) $\gamma(t) = (\text{sen}(t), t, \cos(t))$, $0 \le t \le \pi$
u) $\gamma(t) = (\cos(t/2), t/\pi, \text{sen}(t/2))$, $0 \le t \le 2\pi$
v) $\gamma(t) = (\text{sen}(t), t^2, \cos(t))$, $0 \le t \le 2\pi$
w) $\gamma(t) = (e^t, \cos(t), \text{sen}(t))$, $0 \le t \le 2\pi$
x) $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \text{sen}(t/\pi))$, $-2\pi \le t \le 2\pi$
y) $\gamma(t) = (e^{-t}, \cos(t), \text{sen}(t))$, $0 \le t \le 10\pi$
z) $\gamma(t) = (\cos(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \text{sen}(t)\,\text{sen}(\pi e^{-t}), \cos(\pi e^{-t}))$, $t \in [0, \infty)$

Dica: procure identificar quem corresponde a θ, ϕ e R.

6.4 Definição: Uma *curva suave* em $\mathbb{R}^2$ (ou em $\mathbb{R}^3$), é uma curva $\gamma(t)$ que tem derivada $\dfrac{d\gamma}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ contínua e não nula em cada ponto interior a seu domínio $a < t < b$.

Curvas suaves são necessárias para resolver *integrais de linha*, que aparecem em problemas de cálculo de comprimento de trajetória e de trabalho, por exemplo.

Referências

[1] BOULOS, P. e CAMARGO, I. - Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª ed., Pear

[2] GUIDORIZZI, H. L. - Um Curso de Cálculo, vols. 1, 2 e 3 , Editora LTC, RJ.

[3] PITOMBEIRA DE CARVALHO, J. - Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Vetorial: Um Tratamento Moderno, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1975.

[4] STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. - Geometria Analítica, McGraw-Hill, São Paulo, 1987.

[5] VENTURI, J. J. - Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, 9ª ed., Unificado, Curitiba. 2001.

[6] VENTURI, J. J. - Cônicas e Quádricas, 5ª ed., Unificado, Curitiba. 2003.

[7] WINTERLE, P. - Vetores e Geometria Analítica, Makron Books, São Paulo, 2000.